LECCIONES DE CÁLCULO INFINITESIMAL

LECCIONES

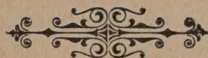
DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

POR

D. JOAQUIN LUBELZA

INGENIERO PRIMERO, PROFESOR DE LA ASIGNATURA
EN LA ESCUELA DE MINAS



MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE JAIME RATÉS
Plaza de San Javier, núm. 6.
1905

PRÓLOGO

Decía M. H. Fayol (*) en la sesión de clausura (23 de Junio de 1900) del Congreso internacional de Minas y de Metalurgia: «..... Les uns songent sans cesse à surcharger les programmes d'admission et les cours professés dans les grandes écoles industrielles; d'autres pensent qu'on a déjà dépassé la limite de l'enseignement théorique nécessaire et qu'on fait perdre inutilement à l'élite de notre jeuneusse un an ou deux qui seraient mieux employés dans la vie active. Je pense comme ces derniers.»

....

«Mais il y a loin de là à vouloir que chacun de nos ingénieurs soit un savant, et, à la façon dont on augmente sans cesse les programmes, il semble vraiment que tel est le but visé. On ne l'atteint pas; et d'ailleurs, c'est parfaitement inutile. Voulez-vous savoir quel est l'usage qu'on fait par exemple, des mathématiques supérieures dans nos deux grandes industries? Eh bien, on ne s'en sert pas. Quand j'ai eu constaté cela pour moi-même, après une carrière déjà longue, je me suis demandé si je ne faisais pas exception;

(*) *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale* de Saint-Etienne.—Tercera serie, tomo XV (1901).

j'ai pris des renseignements et j'ai vu que c'est une règle générale: les ingénieurs ne se servent pas des mathématiques supérieures dans l'exercice de leurs fonctions et les directeurs pas davantage.

»Il faut apprendre les mathématiques, c'est entendu; mais dans quelle mesure? Telle est la question qui se pose et que les professeurs ont presque toujours été seuls à résoudre jusqu'à présent. Or, en pareille matière, les professeurs me paraissent particulièrement redoutables, et d'autant plus qu'ils sont plus savants et plus zélés. Ils voudraient transmettre toute leur science et trouvent que les élèves quittent toujours trop tôt les bancs de l'école. De là beaucoup d'efforts inutiles et beaucoup de temps perdu»............

Y le contestaba M. Haton de la Goupillière: «..... J'ai commencé ma carrière par les mathématiques pures. Pendant vingt ans, j'ai enseigné à l'École des Mines ou à la Sorbonne les calculs différentiel et intégral, ainsi que la mécanique. En ce qui concerne l'École des Mines, j'étais pénétré des idées que vous a développées M. Fayol; je faisais un cours très limité de calcul différentiel et intégral que j'avais réduit à dix leçons, et dans lequel j'avais soigneusement condensé tout ce qui me paraissait nécessaire pour mettre les élèves en état de traverser tout le reste de l'enseignement. Plus tard, je suis passé au cours d'exploitation des mines et de machines. Celui d'analyse a été alors confié à un homme absolument éminent, un mathématicien de premier ordre qui a cru devoir donner à ce cours un développement tout différent. Depuis lors, on a respecté cette ampleur apportée par mon successeur; mais je crois que ce que dit M. Fayol est juste, et qu'il conviendrait de réduire les mathématiques pures à ce qu'ont à appliquer les jeunes gens. Toutefois, je vais mettre ici une réserve à mon approbation. Il ne faut pas seulement en effet que l'ingénieur

soit en état d'exécuter les calculs futurs qui, d'après M. Fayol, se réduiraient presque à rien; il faut tout d'abord que l'élève puisse traverser l'École, et il est nécessaire que l'enseignement y soit présenté avec une précision mathématique, toutes les fois que cela reste possible.

»Mais je pense surtout, Messieurs, que les mathématiques sont un tout puissant instrument de formation pour l'esprit. Une fois que l'esprit de l'ingénieur sera formé, mettez, si vous le voulez, les mathématiques à l'écart. Votre élève n'en restera pas moins susceptible de devenir un grand ingénieur ou un habile administrateur. Le même homme que vous auriez fait passer par une éducation faiblement mathématique n'atteindrait jamais le même niveau.»

Este criterio, de Ingeniero tan competente como M. Haton de la Goupillière, será el que presida á la redacción de nuestros programas de Cálculo y de Mecánica, creyendo oportuno distinguir:

Si se entiende por *matemáticas* las grandes síntesis de los Descartes, Newton, Leibnitz y Hamilton, ningún ejercicio mental nos parece más educador. En cambio, no creemos ningún otro más enervante que el afeminado *crochet* de minucias *crotalógicas* que, con el nombre de Análisis suelen confeccionar los modernos maestros del arte de *piocher l'x*, como gráficamente la denominan los estudiantes de allende el Pirineo.

Habiendo perdido, en boca de éstos, el *indivisible* de los matemáticos griegos, al que denominó *infinitamente pequeño* Leibnitz, su significación clara y precisa, para ajustarle á los cánones de la jerga *panyoista* germánica (cuyo infinito está en gestación) y para evitar equívocos, le denominamos (con Balmes, en su *Filosofía fundamental) infinitésimo*.

Desvirtuados, en igual sentido, los *límites* de Cauchy que no eran más que la medición práctica del *infinitamente pe-*

queño leibniciano, y convertida la palabra «límite» en muletilla de *analistas* eclécticos, evitaremos su uso.

La división que, por parecernos más lógica, adoptamos en el Cálculo infinitesimal es:

Primera parte.—EXPOSICIÓN TEÓRICA.
Segunda ídem.—APLICACIONES.

Subdividiendo la teoría, en

Libro I.—Análisis *(escalar* y *vectorial)* de la cantidad.—CÁLCULO DIFERENCIAL.

Libro II.—Síntesis de la cantidad.—CÁLCULO INTEGRAL.

J. L.

12 de Octubre de 1905.



NOTA PRIMERA

DE INDIVISIBILIBUS

No nos parece del todo inoportuno, ya que por los textos corrientes no hay quien reconozca á aquellos indivisibles ó *infinitamente pequeños* de Leibnitz y de Cauchy, en sus homónimos modernistas, reunir á continuación algunas citas.

Dice nuestro famoso (gracias á los críticos ingleses) *Luis Vives* en la página 245 del tomo III de la edición de Valencia (1782) refiriéndose á *los indivisibles* de los geómetras griegos, impugnados por Epicuro: «ideo Aristoteles ait eos non mentiri, quoniam non sic ponunt *esse*, sed sic se *imaginari.*»

Pascal, citado por Carnot, en la página 145 de las *Réflexions*..... Tercera edición, París, 1839: «à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la Géometrie, que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là, sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles, faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre dont la somme est certainement un plan. De sorte que quand on parle de *la somme d'une multitude indéfinie de lignes*, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales et indéfinies de laquelle elles soient multipliées.

»En voilà certainement plus qu'il n'était nécessaire, pour faire entendre que le sens de ces sortes d'expressions, *la somme des lignes, la somme des plans*, etc., n'a rien que de très conforme à la pure Géometrie.»

Añadiendo Carnot: «Ce passage est remarquable, non-seulement en ce qu'il prouve que les géomètres savaient

très bien apprécier le mérite de la méthode des indivisibles, mais encore en ce qu'il prouve que la notion de l'infini matématique, dans le sens même qu'on lui attribue aujourd'hui, n'était point étrangère à ces géomètres; car il est clair par ce qu'on vient de citer de Pascal, qu'il attachait au mot *indéfini* la même signification que nous attachons au mot *infini*, qu'il appelait simplement *petit* ce que nous appelons *infiniment petit*, et qu'il négligeait sans scrupule ces petites quantités vis-à-vis des quantités finies: car on voit que Pascal regardait comme de simples rectangles les trapèzes ou petites portions de l'aire de la courbe comprises entre deux ordonnées consécutives, négligeant par conséquent les petits triangles mixtilignes qui ont pour bases les différences de ces ordonnés. Cependant personne n'a été tenté de reprocher à Pascal son défaut de sévérité.»

Cauchy, en su primera lección de Cálculo infinitesimal en la Escuela Politécnica, definía como sigue el *infinitamente pequeño:* «Lorsque les valeurs numériques succesives d'une même variable decroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite.» Después de tan competente Ingeniero de Caminos, dejemos la palabra á dos de Minas.

Dice *Haton de la Goupillière* en el preámbulo de su Cálculo infinitesimal. París, 1860: «J'ai adopté le principe des infiniment petits, complété par Carnot. C'est en effet le seul acceptable pour les personnes qui se destinent à l'application; et il est aussi parfaitement convenable au point de vue purement théorique, car il simplifie beaucoup les recherches, et on ne peut se dispenser, dans les parties élevées de la science, d'en revenir tôt ou tard à son emploi.»

Y *Freycinet.—De l'Analyse infinitésimale.*—Segunda edición. París, 1881, página 225: «La divergence des points de vue que nous venons de signaler était due à la démarcation profonde obstinément établie entre la notion de *limite* et celle d'*infiniment petit*. Et vraiment on s'en étonne quand on pense combien est étroite la connexion naturelle de ces deux conceptions. Comment, en effet, concevoir une limite sans un infiniment petit correspondant? Puisqu'une limite est une valeur fixe dont s'approche une quantité variable, la différence entre cette limite et la variable n'est-elle pas une quantité décroissant indéfiniment et pouvant être rendue aussi petite qu'on le veut, c'est-à-dire un infiniment petit dans la véritable acception du mot? Et encore, si l'on considère la limite du rapport de deux quantités variables convergeant vers zéro, comment songer à cette limite sans songer en même temps aux infiniment petits qui forment les termes du rapport? Inversement, comment avoir la no-

tion d'un infiniment petit sans avoir celle de deux quantités dont il serait la différence, ou même sans concevoir la limite posée à cette décroissance indéfinie, limite qui est ici zéro?

»Aussi n'est-ce pas sans surprise que nous avons vue un des plus éminents penseurs de ce siècle maintenir entre les deux conceptions une barrière infranchissable, puisqu'il admet l'une comme rigoureuse et repousse l'autre comme essentiellement fausse.» «Quand on considère, dit-il *(Augus-»to Comte*, en su *Filosofía positiva)*, en elle-même, et sous le »rapport logique, la conception de Leibnitz, on ne peut »s'empêcher de reconnaître avec Lagrange qu'elle est radi-»calement vicieuse, en ce que, suivant ses expressions, la »notion des infiniment petits est une idée fausse, qu'il est »impossible, en effet, de se représenter nettement, quoi-»qu'on se fasse quelquefois illusion à cet égard. L'Analyse »transcendante, ainsi conçue, présente, à mes yeux, cette »grande imperfection philosophique, de se trouver encore »essentiellement fondée sur ces principes métaphysiques »dont l'esprit humain a eu tant de peine à dégager toutes »ses théories positives. Sous ce rapport, on peut dire que »la Méthode infinitésimale porte vraiment l'empreinte ca-»ractéristique de l'époque de sa fondation et du génie pro-»pre de son fondateur.»

Y añade Freycinet:

«Au fond, les motifs des répugnances manifestées contre les infiniment petits se résument dans cette pensée de Lagrange, qu'on a *le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités;* autrement dit, *les infiniment petits n'existent pas.* Il me paraît qu'il y a là un malentendu (el mismo que le echaba en cara Aristóteles á Epicuro, que era el *Comte* de aquella época). Veut-on parler des quantités *naturelles*, ou de l'objet de nos conceptions *rationnelles?* Si l'on entend que dans la nature il n'y a pas d'infiniment petits, c'est incontestable; tout ce qui existe est déterminé et par conséquent fini. Mais, à ce point de vue, il n'y a pas non plus de quantité variable: une quantité, par cela seul qu'elle est, a une valeur actuelle précise. Notre esprit seul crée la notion de variable, en rapprochant les grandeurs de quantités voisines et les regardant comme des valeurs successives d'une même quantité. La notion de variable n'est pas plus légitime que celle d'infiniment petit, et il faut les admettre ou les repousser toutes les deux.»

El que quiera conocer la historia del Cálculo infinitesimal en el siglo XVIII, debe leer el prólogo de las excelentes *Instituciones* de D. Josef Chaix. Madrid, 1801. Imprenta Real.

NOTA SEGUNDA

«QUATERNIONS»

La palabra latina *quaternio, ionis* (*), adoptada en Inglaterra por la milicia (**) é incorporada al lenguaje corriente como puede verse en el Diccionario de Velázquez de la Cadena (New-York, 1852), convertida en *quatérnion*, es la adoptada por Hamilton para la cantidad numérica compleja de tres dimensiones.

En la primera parte del mismo Diccionario (hispano-americano-inglés) da el Sr. Velázquez como española la:

«*Cuaternión.*—Union of four things, of four sheets in printing.»

No creemos autoridad suficiente la del Dr. Seoane para incorporar al castellano un vocablo de la jerga cosmopolita de algunas imprentas americanas.

La primera vez que de estos números oímos hablar fué al muy competente Ingeniero y Profesor que fué de la Escuela de Minas, de Construcción primero y de Topografía y Geodesia últimamente, D. Juan Pablo Lasala (q. s. g. h.), en su Academia preparatoria de la Plaza del Rey, el año 1875; y los decía *cuaternios*, como parece natural, de querer, en forma castellana, aproximarse al sonido de la palabra inglesa. Si nuestra memoria no nos engaña, así los ha escrito alguna vez D. José Echegaray. El que escrupulice en usar palabras nuevas para expresar ideas nuevas, debe decir y escribir con la Academia en la última edición de su Diccionario (pág. 291):

«*Cuaterno*, adj. (***).—Que consta de cuatro números.»

Con esta acepción empleó Hamilton la equivalente *de su idioma*. Sabido es que los autores ingleses, cuando usan sustantivos latinos, los declinan; así, por ejemplo, refiriéndose á los *principios* de Newton, dicen *the principia*, no *the principiums*.

Advertencia.—La primera lección de cálculo vectorial, por este texto, la explicó el 19 de Octubre el alumno don Jesús Díez é Hidalgo, en la Escuela de Minas.

(*) El número de cuatro. (Raymundo de Miguel, sexta edición, página 774.)

(**) Una fila de cuatro soldados.

(***) Sustantívase en la lotería de cartones, aunque no lo diga el Diccionario, que incluye los análogos *ambo* y *terno*.

ÍNDICE-PROGRAMA

LIBRO I

Núms. Páginas.

LECCION PRIMERA

LECCIÓN SEGUNDA

Núms. Páginas.

LECCION TERCERA

LECCIÓN CUARTA

LECCION QUINTA

LECCIÓN SEXTA

LECCIÓN SÉPTIMA

LECCIÓN OCTAVA

LECCIÓN NOVENA

(FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE)

EJERCICIOS

PRIMERA PARTE

TEORÍAS, PRINCIPIOS Y REGLAS

LIBRO PRIMERO

DIFERENCIAL (ESCALAR Y VECTORIAL)

LECCIÓN 1.ᴬ

PRINCIPIOS Y DEFINICIONES

1. Estúdianse en el *Cálculo infinitesimal* las variaciones de la cantidad en la continuidad.

La cantidad continua se subdivide en permanente y sucesiva. Recibe el nombre de *extensión* la primera, de *tiempo* la segunda. En la extensión pueden reducirse las variaciones á tres lineales. En el tiempo no cabe variación más que en su único y simple concepto; pudiéndose, por esto, equiparar á una lineal de extensión, y representar gráficamente como tal.

Bastará, pues, analizar la variación de una cantidad lineal. En ésta deben distinguirse dos conceptos diversos: la variación exclusivamente de magnitud; la variación de dirección.

1.ª **2.** No apreciando más que la primera, podemos figurarnos, para su análisis, la cantidad lineal de extensión variable como rectilínea. Pasando, de un modo continuo, la cantidad lineal desde la longitud $Oa = \alpha$, precisa y determinada (*constante*, que se dice) á otra general ó corriente (*variable*) $Oa_m = x$, la variación efectuada, ó incrementación recibida, habrá sido aa_m. Denomínase á esta variación *incremento* ó *diferencia* y se nota con la letra griega Δ:

$$\Delta_a^x x = Oa_m - Oa = x - \alpha,$$

diferencia ó incremento de x, desde α, hasta x, igual á $(x-\alpha)$.

Si suponemos subdividido el intervalo aa_m en los parciales aa_1, $a_1a_2 \dots a_{m-1}$, a_m, que notaremos Δx, $\Delta_1 x$, $\Delta_m x$:

(**1**) $\Delta_a^x x = \Delta x + \Delta_1 x + \dots \Delta_m x = \Sigma_a^x \Delta x$ (suma de diferencias análogas á la Δx, comprendidas en el intervalo de α á x).

Si queremos *medir* el incremento total $(\Delta_\alpha^x x)$ por su relación con uno de los parciales, tomado por unidad, es evidente que conviene que éstos sean iguales entre sí, teniéndose entonces,

$$\Delta x = \Delta_1 x = \dots = \Delta_m x\,;$$

y, por consiguiente:

$$\frac{\Delta_\alpha^x x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta_1 x}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta_m x}{\Delta x} = (1+1+\dots+\dots+1) = m$$

$$= \frac{\Sigma_a^x \Delta x}{\Delta x}.$$

Como la igualdad geométrica (**1**), lo único que nos dice es que el todo aa_m es el conjunto de partes aa_1, $a_1a_2 \dots$, para nada interviene en ella la idea de *número*, ó sea de relación entre esas cantidades entre sí, ó con cualquiera de su especie que se tome por unidad.

Haciendo crecer indefinidamente el número de los segmentos $aa_1, a_1a_2 \dots$, etc., la verdad geométrica que aquella expresión entraña, permanecerá inmutable. Cuando sean infinitos, que para la *continuidad* son *necesarios*, á las *cantidades lineales* correspondientes á los segmentos parciales, que *en este* caso se denominan *elementos*, se las nota con la letra latina d en vez de la griega Δ; en vez de *diferencia* se lee *diferencial* (Leibnitz). La Σ se escribe entonces $\int$, que se dice *integral*, en vez de *suma;* sin dejar por ello de serlo y de valor invariable. La expresión (**1**) se transforma en la

$\Delta_\alpha^x x = dx + d_1 x + \ldots + d_\infty x = \int_\alpha^x dx$ (integral, desde α hasta x, de dx).

3. Conviene fijarse en que *la cantidad* no puede en manera alguna anularse por subdivisión. Tan línea es la mitad de otra, como lo era la primera, y así sucesivamente. Si, en vez de la igualdad geométrica, queremos expresar una igualdad algébrica ó numérica, tomando como unidad lineal una longitud arbitraria L:

$$\frac{\Delta_\alpha^x x}{\mathrm{L}} = \frac{dx}{\mathrm{L}} + \frac{d_1 x}{\mathrm{L}} + \ldots \frac{d_\infty x}{\mathrm{L}}$$

$$= \frac{x-\alpha}{\mathrm{L}} \left[\frac{dx}{x-\alpha} + \frac{d_1 x}{x-\alpha} + \ldots \frac{d_\infty x}{x-\alpha} \right] = \frac{\int_\alpha^x dx}{\mathrm{L}}.$$

Como

$$\frac{dx}{x-a} = \left[\frac{\Delta x}{x-a} = \frac{1}{m} \right]_{m=\infty} = 0,$$

vemos que al querer medir con L los elementos dx aisladamente:

$$\left[\frac{dx}{x-\alpha} + \frac{d_1 x}{x-\alpha} + \ldots + \frac{d_\infty x}{x-\alpha} \right] = [0 + 0 + \ldots + 0] = \infty . 0;$$

se nos pone de manifiesto la insuficiencia de las unidades convencionales del Álgebra, para el análisis de la cantidad continua.

El resultado indeterminado $\infty . 0$, de las mediciones elementales, no lo es más que aparentemente, puesto que efectuada la mensuración del total:

$$\frac{dx + d_1 x + \ldots d_\infty x = x - \alpha}{x - \alpha} = 1.$$

. 2.ª **4.** Supongamos ahora otra cantidad líneal (y) ligada de tal modo con la anterior (x), que á cada longitud de la x corresponda una determinada de y. Es decir que,

para

$$
\begin{array}{ll}
x = Oa = x, & y = Ob = y; \\
x_1 = Oa_1 & y_1 = Ob_1; \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
x_m = Oa_m = \alpha, & y_m = Ob_m = \beta.
\end{array}
$$

Hagamos pasar por el origen O de las xx una recta cualquiera (OY), y representemos en ella las yy, á partir (para mayor sencillez) del mismo origen O. El enlace de ambas cantidades estará gráficamente representado por la curva pp_m, lugar de los puntos de intersección de las paralelas al otro eje por los puntos correspondientes a y b, a_1 y b_1 ..., a_m y b_m.

5. Analicemos la variabilidad de la cantidad lineal y, á partir de su valor corriente ó general $Ob = y$, hasta otro cualquiera fijo ó constante, $Ob_m = \beta$, en correspondencia con los de x desde la x corriente (Oa) á la precisa $Oa_m = \alpha$. Por el enlace dicho, á las

$$aa_1 = \Delta x, \quad a_1a_2 = \Delta_1 x \ldots a_{m-1}\, a_m = \Delta_m x,$$

corresponderán, respectivamente, las

$$bb_1 = \Delta y, \quad b_1b_2 = \Delta_1 y \ldots b_{m-1}\, b_m = \Delta_m y.$$

Estas *diferencias,* que se denominan *primeras,* de y, forman una serie de cantidades, en que al concepto lineal de longitud, de las yy de que proceden, añade el símbolo Δ la idea de *sentido;* puesto que podrán ser diferencias *positivas* ó *negativas.*

Las diferencias, entre dos consecutivas de estas *primeras,* se denominan *diferencias segundas,* y se notan Δ^2.

Las diferencias, entre las *segundas* consecutivas, *terceras* (Δ^3), y así sucesivamente.

Dedúcese inmediatamente, del modo de formación de estas series:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = y_1 + \Delta_1 y \\ \Delta_1 y = \Delta y + \Delta^2 y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y_1 = y + \Delta y \\ y_2 = y_1 + \Delta y + \Delta^2 y \end{array}\right\} y_2 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2 y = \Delta_1 y + \Delta_1^2 y \\ \Delta_1^2 y = \Delta^2 y + \Delta^3 y\end{array}\right\} \Delta_2 y = \Delta_1 y + \Delta^2 y + \Delta^3 y = \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y \quad \left.\begin{array}{l} y_3 = y_2 + \Delta_2 y \end{array}\right\} y_3 = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$

Tenemos, pues,

$$y_1 = y + \Delta y;$$

$$y_2 = y + 2\Delta y + \frac{2.(2-1)}{1.2}\Delta^2 y;$$

$$y_3 = y + 3\Delta y + \frac{3(3-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}\Delta^3 y;$$

ó, llamando n al índice, que en estas tres primeras:

$$y_n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\Delta^4 y + \ldots$$

6. Para generalizar la fórmula, nos bastará demostrar que verificándose con el índice n, tiene que verificarse con el $(n+1)$; siéndonos previamente necesario poner de manifiesto dos propiedades del símbolo Δ (incremento ó diferencia).

1.ª Siendo u y v dos cantidades, por definición:

$$\Delta(u \pm v) = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - [u \pm v] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Incremento de una suma algébrica de cantidades igual á la suma algébrica de los incrementos que parcialmente reciben estas cantidades.

2.ª El incremento de una cantidad afectada de un coeficiente numérico determinado (*constante*) es igual al producto de este coeficiente por el incremento de la cantidad. En efecto: si el coeficiente (m) es entero

$$\Delta(mu) = \Delta(u + u + \ldots, m \text{ veces}) = \Delta u + \Delta u + \ldots, m \text{ veces} = m\Delta u;$$

si fracionario $\left(\frac{m}{n}, m \text{ y } n \text{ enteros}\right)$, llamando $\frac{m}{n} u = v$:

$$mu = nv; \qquad [\Delta(mu) = m\Delta u] = [\Delta(nv) = n\Delta v];$$

$$\left(\Delta v = \Delta \frac{m}{n} u\right) = \frac{m}{n} \Delta v;$$

si inconmensurable, escribiéndole en serie de sumandos conmensurables, quedaría demostrado.

Ahora bien:

$$\Delta(y_n) = y_{n+1} - y_n;$$

de donde

$$y_{n+1} = y_n + \Delta(y_n);$$

verificándose la fórmula para y_n;

$$y_{n+1} = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y + \ldots$$
$$+ \Delta\left[y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y + \ldots\right]$$

Por las reglas dichas, como $\Delta[\Delta^p y] = \Delta^{p+1} y$, quedará

$$\begin{array}{r|l|l|l} y_{n+1} = y + n & \Delta y + \frac{n(n-1)}{2!} & \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} & \Delta^3 y \\ + 1 & \Delta y + \qquad n & \Delta^2 y + \qquad \frac{n(n-1)}{2!} & \Delta^3 y \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} & \Delta^4 y + \ldots \\ + \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} & \Delta^4 y + \ldots \end{array}$$

ó sea, reduciendo:

$$y_{n+1} = y + (n+1)\Delta y + \frac{(n+1)n}{2!} \Delta^2 y + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \Delta^3 y$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} \Delta^4 y + \ldots$$

Queda plenamente demostrada la generalidad de la fórmula; y por consiguiente,

$$y_m = y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2\,!}\Delta^2 y + \ldots + \Delta^m y.$$

7. Dedúcese de esta fórmula llamando h al incremento aa_m de x, y k al correspondiente bb_m de y:

$$k = y_m - y = m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2\,!}\Delta^2 y + \ldots + \Delta^m y.$$

Consideremos ahora á x variando desde una longitud $Oa_0 = Oa - h = x - h$; supongamos en ella una incrementación parcial uniforme, es decir, que $\Delta x = \Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots \Delta_m x = \frac{h}{m} = \varepsilon$; y tendremos:

$$m = \frac{h}{\varepsilon},$$

y, por consiguiente,

$$k = h\frac{\Delta y}{\varepsilon} + \frac{h(h-\varepsilon)}{2\,!}\frac{\Delta^2 y}{\varepsilon^2} + \frac{h(h-\varepsilon)(h-2\varepsilon)}{3\,!}\frac{\Delta^3 y}{\varepsilon^3} + \ldots$$

Haciendo crecer indefinidamente el número m, con $m = \infty$, las diferencias pasan á diferenciales:

$$\varepsilon = dx;\quad \Delta y = dy;\quad \Delta^2 y = d^2 y;\quad \ldots \Delta^n y = d^n y;$$

y queda

$$k = h\frac{dy}{dx} + \frac{h(h-dx)}{2\,!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h(h-dx)(h-2dx)}{3\,!}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

Si pasamos de esta igualdad geométrica á la numérica con unidad L, como

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\Delta x}{h}\cdot\frac{h}{L} = \frac{1}{m}\cdot\frac{h}{L},$$

$$\frac{dx}{L} = \frac{1}{\infty}\cdot\frac{h}{L} = 0,$$

se obtiene la serie ó fórmula (de Taylor):

$$\frac{k}{L} = \frac{h}{L}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{h}{L}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{L}{2!} + \left(\frac{h}{L}\right)^3\frac{d^3y}{dx^3}\frac{L^2}{3\,!} + \ldots;\quad (a).$$

Como los incrementos continuos y simultáneos, h de x y k de y dan, relacionados con la unidad convencional L, un número preciso y determinado (conmensurable ó no), las relaciones (*últimas relaciones,* que decía Newton) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., que toman, al pasar á los números, la forma $\frac{0}{0}$ no pueden ser indeterminadas, sino que tendrán que ser números determinados; abstracto $\frac{dy}{dx}$; concretos los siguientes, y de la especie L^{-n+1}, si n es su índice, como era de esperar, puesto que las diversas diferencias, y por consiguiente, las diferenciales, son de la misma especie de las cantidades incrementadas, completada con el signo de su sentido.

8. De las dos cantidades variables x é y, siempre podremos asignarle, á una de ellas, una incrementación arbitraria. A ésta, que escojamos, se la denomina, por ello, variable independiente. En lo que antecede, y para obtener la sencillez, siempre apetecible, de los resultados, la hemos supuesto creciendo en Δx constantes, iguales á ε. Por esta razón, la variable *independiente* ó fundamental, recibe también la denominación de variable *equicrescente.*

Esas *relaciones últimas* nos ponen de manifiesto cuál debe ser la *unidad* conveniente para la mensuración de las sucesivas diferenciales de y. Esta unidad, que podemos llamar diferencial, es la (dx), diferencial de la variable independiente ó equicrescente.

Partiendo de la *equicrescencia* de x, ó constancia de Δx:

$$\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta x}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2};$$

.................................; ....;

$$\Delta\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\right)=\frac{\Delta(\Delta^n y)}{\Delta x^n}=\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^n}; \qquad \frac{\Delta\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta^{n+1} y}{(\Delta x)^{n+1}}.$$

Pasando á las diferenciales:

$$\frac{d\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)}{dx} = \frac{d^{n+1}y}{(dx)^{n+1}}.$$

9. Toda esta notación es de Leibnitz, y la única aplicable cuando hay que estudiar aisladamente las diferenciales. A la *relación última* (*ultima ratio*, de Newton) $\frac{dy}{dx}$, se la denomina *derivada primera* de y con respecto á x. A la $\frac{d^2y}{dx^2}$, por obtenerse de la anterior como aquélla se obtuvo de y, se la nombra *derivada segunda;* y así sucesivamente.

Cuando no hay que separar los términos diferenciales de su relación, es más cómoda, en unos casos, la notación de Lagrange:

$$\frac{dy}{dx} = y'; \quad \frac{dy^2}{dx^2} = y''; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y'''; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = y^{\text{IV}} \ldots; \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)};$$

en otros, la de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{D}_x y; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{D}_{x^2} y; \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{D}_{x^n} y.$$

Como

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx, \ldots \quad d^n y = \frac{d^ny}{dx^n} . dx^n;$$

y (dx), $(dx)^2$ ... $(dx)^n$, son las *especies* respectivas de que las derivadas son los números, se las denomina también, á esas sucesivas derivadas, *coeficientes diferenciales.*

10. Si el enlace de y con x se nos da por la ecuación numérica $\frac{y}{\mathrm{L}} = f\left(\frac{x}{\mathrm{L}}\right)$, se dice que y es función explícita de x, siendo f (*característica* de la función) el símbolo que expresa las operaciones que hay que efectuar con el número $\frac{x}{\mathrm{L}}$, para obtener el $\frac{y}{\mathrm{L}}$.

Tendremos en este caso si, para mayor sencillez (aunque se sobreentienda) dejamos de escribir la unidad L:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x); \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

y, por consiguiente,

$$D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]_{\frac{\Delta x}{L} = 0} = \text{una cierta fun-}$$

ción de x, que se escribe $= f'(x)$.

Fig. 3.ª **11.** *Construcción gráfica de las derivadas.*—Consideremos la cuerda AB que en la gráfica de $y = f(x)$ une los puntos de ésta A (x, y) y B $(x + \Delta x, y + \Delta y)$; y trácese por A la AC, paralela al eje de las XX, hasta que encuentre á la ordenada $y_1 = y + \Delta y$. Llamando α al ángulo BAC y θ al de los ejes; en el triángulo ABC.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)} = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tang} \alpha}.$$

El anularse (numéricamente) Δx, equivale á transformarse la secante AB en la tangente en A. Si llamamos β al ángulo que esta tangente AT forma con el eje de las XX:

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0} = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tang} \beta}.$$

Tomando, á partir de A y paralelamente á OX, la longitud AE $=$ L; y por su extremo E, trazando la paralela ED, al OY, hasta su encuentro en D con la tangente AT; el número concreto de unidades L que mida ED, será igual al abstracto correspondiente á $D_x y = y'$. En efecto, en el triángulo ADE:

$$\frac{ED}{L} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\theta - \beta)} = y' = D_x y.$$

Si los ejes fueran rectangulares ($\theta = 90°$):

$$y' = \operatorname{tang} \beta.$$

Tomando como valores de y los de y', podríamos trazar otra gráfica de la $y' = f'(x)$ y construir en ella análogamente la derivada $y'' = \frac{dy'}{dx} = f''(x)$; y así sucesivamente.

12. Parece por esta igualdad, numérica, que la tangente se confunde con la cuerda correspondiente al arco infinitésimo, comprendido entre las ordenadas y é $y + dy$, y por eso hay la costumbre de decir que la tangente tiene un elemento común con la curva. Para todos los efectos numéricos no hay inconveniente en admitirlo. Geométricamente no es exacto.

De la igualdad geométrica, de que se dedujo la fórmula numérica de Taylor:

$$\frac{k}{h} = y' + \frac{h - dx}{2\,!}\, y'' + \frac{(h - dx)(h - 2dx)}{3\,!}\, y''' + \ldots$$

Para la cuerda del arco infinitésimo el coeficiente angular es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h}\Big]_{h=dx} = y' + 0\,.$$

El de la tangente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h}\Big]_{h=0} = (*)\; y' - \frac{dx}{2\,!}\, y'' + 2\,\frac{(dx)^2}{3\,!}\, y''' \ldots$$

Distinguiendo lo perteneciente á la cuerda con el subíndice c, y con el T lo que á la tangente se refiere:

$$\frac{d_c y}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big]_c = y' = \frac{dy}{dx} + 0\,; \qquad d_c y = dy$$

$$\frac{d_{\mathrm{T}} y}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big]_{\mathrm{T}} = y' - \frac{dx}{2\,!}\, y'' + \ldots\,; \qquad d_{\mathrm{T}} y = dy - \frac{dx^2}{2\,!}\, y'' + \ldots$$

Por consiguiente:
$d_{\mathrm{T}} y - d_c y =$ distancia que la ordenada $(y + dy)$ de la curva, prolongada si $y'' < 0$, intercepta entre ésta y la tangente $= - \frac{dx^2}{2\,!}\, y'' + \ldots$

(*) Antes de anular h, habría que hacerla igual á $m\,\Delta x$; anular luego m, y por último hacer $\Delta x = dx$.

13. *Diversos órdenes de infinitésimos.*—Llamaremos *infinitésimo principal* á la unidad diferencial (dx) suministrada por la variable independiente. La dy que, relacionada con dx da un número N, se dice de primer orden .... $dy = N\,dx$.

La d^2y, que da el N′ con $(dx)^2$, se dice de segundo orden .... $d^2y = N'\,(dx)^2$.

La d^ny, que con $(dx)^n$ da el N″, de enésimo .... $d^ny = N''\,(dx)^n$.

En general, cualquier infinitésimo que, relacionado con otro de enésimo orden, dé un número, se dice que es de ese orden, puesto que será de la especie $(dx)^n$.

Consecuencias de estas definiciones:

1.ª La suma de dos infinitésimos del mismo orden, es de ese orden. En efecto:

$$N\,(dx)^n + N'\,(dx)^n = (N + N')\,(dx)^n.$$

2.ª La diferencia será, por lo menos, de ese orden; podrá serlo de superior, por anulación geométrica de términos inferiores.

3.ª El orden del producto será el correspondiente á la suma de los órdenes de los factores:

$$[N\,(dx)^n]\,[N'\,(dx)^m] = N\,N'\,(dx)^{n+m}.$$

4.ª El del cociente de dos, corresponde á la diferencia:

$$\frac{N\,(dx)^n}{N'\,(dx)^m} = \frac{N}{N'}\,(dx)^{n-m}.$$

5.ª Al pasar de las expresiones geométricas, en que entren como sumandos infinitésimos de distintos órdenes, á ecuaciones numéricas, como hay que tomar por unidad la de la especie correspondiente al orden inferior (después de efectuadas todas las reducciones), se eliminan, por no dar número en su relación á esa unidad, todas las de los órdenes superiores. La locución usual, *se desprecian*, no es exacta.

LECCIÓN 2.ª

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Fórmulas generales.

14. Para la $y = f(x)$, demostramos en el número **7** que el incremento finito k, que recibía por el de x, era:

$$k = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \frac{\Delta x}{1} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

Para el incremento infinitésimo ó diferencial, vimos también que siendo equicrescente x:

$$dy = f'(x) dx\,,$$

por ser

$$\varepsilon = dx = \text{constante}.$$

Si no podemos, ó no queremos, en el intervalo de la x corriente en adelante, que estudiemos, considerar constante á dx, se tendrá (siendo N un coeficiente numérico):

$$\varepsilon - dx = \mathrm{N} dx\,;$$

y por consiguiente:

$$dy = f'(x) dx + \frac{\mathrm{N}}{2!} f''(x) dx^2 + \dots$$

ó, midiendo á dy con dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + 0\,.$$

15. *Funciones de funciones.*—Si en vez de ser x variable independiente, es una cierta función (φ) de otra tercera (u):

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ x = \varphi(u) \end{array}\right\} y = f[\varphi(u)].$$

Por lo que acabamos de deducir, aunque ya no es equicrescente x:

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{D}_u[\varphi(u)] = \varphi'(u),$$

con la notación de Lagrange, ya muy defectuosa en estos casos.

Por consiguiente:

$$\mathrm{D}_u f(x) = \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{du} = \mathrm{D}_x y\,.\,\mathrm{D}_u x,$$

y así sucesivamente.

En resumen: para obtener la derivada de una función de función ..., con relación á la variable afectada de una sola característica (única, por lo tanto, que, como independiente, puede suponerse equicrescente), basta multiplicar las derivadas que sucesivamente se van obteniendo (con relación á la inmediatamente afectada de la característica que sea).

16. *Otras formas de la serie de Taylor.*—Siendo aquella fórmula general, sin más limitación que la necesaria de continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo considerado, que nos sirvió para deducirla, habrá de ser cierta para valores cualesquiera (de x y de Δx) de los comprendidos en dicho intervalo continuo.

Haciendo

$$\left.\begin{array}{r} x = m \\ \Delta x = q \end{array}\right\} f(m+q) = f(m) + f'(m)q + f''(m)\frac{q^2}{2!} + \cdots, \qquad (2)$$

representando $f^{(n)}(m)$ el valor especial numérico que toma la $f^{(n)}(x)$ cuando en ella se hace $x = m$.

Si hacemos ahora $q = x$

$$f(x+m) = f(m) + f'(m)x + f''(m)\frac{x^2}{2!} + \dots \qquad (3);$$

que, con $m = 0$ y la misma notación simbólica, toma la forma

$$f(x) = (0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

En esta forma (que recibe el nombre de Mac-Laurin, del primero que la expuso), es muy útil, por permitirnos desarrollar, según las potencias ascendentes de x, cualquier función continua de esta variable.

17. Consideradas completas estas series, es evidente (existiendo la continuidad de la función $f(x)$, admitida para su deducción) que al asignar valores numéricos determinados á x, determinados quedan los suyos, aunque con frecuencia inconmensurables. Como, por lo común, son indefinidas, podremos tomar solamente sus (p) primeros términos, hasta el

$$f^{(p-1)}(m)\frac{n^{(p-1)}}{(p-1)!},$$

dejando de apreciar el *resto* (que así se denomina):

$$R_p = \frac{n^p}{p!}\left[f^{(p)}(m) + f^{(p+1)}(m)\frac{n}{p+1} + f^{(p+2)}(m)\frac{n^2}{(p+1)(p+2)} + \dots\right]$$

Conviene fijarse en que si ninguna de las derivadas hasta las $f^{(p-1)}$ inclusive, toma el valor $\pm\infty$, al hacer $x = m$, tampoco podrá tomar el $\mp\infty$ ninguna de las siguientes. Si lo tomase una, tendría, al sumarse su término con otro de los siguientes, que formar un número finito y determinado, pudiéndose agrupar éstos en sumandos finitos.

Además, si n no es mayor que 1 (en valor absoluto) al crecer p tendiendo á ∞, tenderá $\frac{n^p}{p!}$ á cero; por lo anterior, R_p, ó sea el *resto*, decrecerá también indefinidamente al crecer p. Dícese en este caso que la serie es *convergente*. Es utilizable para obtener el valor numérico de $f(m+n)$ con la aproximación que queramos, tomando un número (p) suficientemente crecido de términos.

Es evidente que los valores extremos del *resto* son, si S es el valor (determinado y preciso) de la serie íntegra.

Para $p = 0 \ldots \quad R_0 = S$
» $p = \infty \ldots \quad R_\infty = 0$

Por consiguiente, los valores extremos de

$$\left[f^{(p)}(m) + f^{(p+1)}(m)\frac{n}{p+1} + \ldots\right] = \rho$$

serán: para $p = 0$

$$\rho_0 = f^{(p)}(m) + f^{(p+1)}(m) \cdot n + f^{(p+2)}(m)\frac{n}{2!} + \ldots,$$

ó, por la (**2**),

$$= f^{(p)}(m+n);$$

y, para $p = \infty$,

$$\rho_\infty = f^{(p)}(m).$$

Cualquiera de los valores intermedios estará comprendido, por la continuidad de la $f^{(p)}(x)$, en la expresión general

$$\rho = f^{(p)}(m + \theta n),$$

siendo θ un coeficiente variable entre cero y la unidad positiva.

Luego, si $f^{(p)}(x)$ es continua en el intervalo, el resto podrá escribirse

$$R_p = \frac{n^p}{p!} f^{(p)}(m + \theta n).$$

Para la fórmula de Mac-Laurin (en que $m = 0$, $n = x$)

$$R_p = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(\theta x).$$

Reglas de la diferenciación.

18. Para la incrementación finita ó diferencias:

a) Por definición, siendo C una constante,

$$\Delta C = 0.$$

b) Por la demostración que dimos en las $\Delta\Delta$ (siendo u, v, s, t..., cantidades cualesquiera),

$$\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v;$$

$$\Delta(s \pm t) = \Delta s \pm \Delta t;$$

Corolarios:

1.° $\Delta(u \pm v \pm s \pm t + ...) = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta s \pm \Delta t + ...$

2.° Si $(u = v)$ $u - v = 0$; $\Delta u - \Delta v = 0 : \Delta u = \Delta v$.

c) Por demostración, allí mismo:

$$\Delta(Cu) = C(\Delta u).$$

Corolario:

$$\Delta \frac{u}{C} = \Delta\left(\frac{1}{C} u\right) = \frac{1}{C} \Delta u = \frac{\Delta u}{C}.$$

d) Si se trata del cociente de dos variables,

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \,.\, v - u \,.\, \Delta v}{v^2 + \Delta v \,.\, v}\,.$$

19. Todas las igualdades anteriores permanecerán al pasar de las $\Delta\Delta$ á las *dd*, y se traducirán en los consiguientes teoremas y reglas:

1.ª $$d(\mathrm{C}) = 0\,.$$

2.ª $$d(u \pm v \pm \ldots) = du \pm dv \pm \ldots\,;$$

si $$u = v\,, \quad du = dv\,.$$

3.ª $$d(\mathrm{C}^{\pm 1} \,.\, u) = \mathrm{C}^{\pm 1} \,.\, du\,.$$

4.ª $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \,.\, v - udv}{v^2 + \left(\frac{dv}{\mathrm{L}} \,.\, \frac{v}{\mathrm{L}} \,.\, \mathrm{L}^2 = 0\right)} = \frac{du \,.\, v - udv}{v^2}\,.$$

5.ª Para el producto de dos variables, se tendrá:

$$\Delta(u \,.\, v) = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - uv = \Delta u \,.\, v + u \,.\, \Delta v + \Delta u \,.\, \Delta v\,;$$

al pasar á las *dd*, puesto que el tercer término quedará de un orden superior á los dos primeros:

$$d(u \,.\, v) = du \,.\, v + u \,.\, dv\,.$$

6.ª Si el número de factores es mayor (n, por ejemplo), llamando p al producto de los $(n-1)$ y q al restante:

$$d[(r \,.\, s \,.\, t \,.\, \ldots = p) \,.\, q] = d(r \,.\, s \,.\, t \,.\, \ldots) \,.\, q + (r \,.\, s \,.\, t \,.\, \ldots)dq\,;$$

y considerando, análogamente, descompuesto en dos factores al producto $(r \,.\, s \,.\, t \,.\, \ldots)$, y así sucesivamente, llegaremos

á que: *la diferencial de un producto es igual á la suma de los productos de las diferenciales de cada uno de los factores variables por el de todos los restantes factores.*

7.ª Para la potencia m^{a} de una variable (v):

a) Si m es entero y positivo,

$$d(v^m) = d(v \,.\, v \,.\, ...,\ m \text{ factores}) = mv^{m-1} \,.\, dv \text{ (por la 6.ª)}$$

b) Si entero y negativo, siempre podremos hacer

$$v^{-m} = u;$$

de donde

$$u\ v^m - 1 = 0; \qquad d(u \,.\, v^m) = 0;$$

ó sea

$$du \,.\, v^m + u \,.\, mv^{m-1} dv = 0;$$

por consiguiente:

$$[du = d(v^{-m})] = -\frac{m \,.\, u \,.\, v^{m+1}}{v^m} dv = -m \frac{v^{-m} \,.\, v^{m-1}}{v^m} dv;$$

ó

$$d(v^{-m}) = -mv^{-m-1} \,.\, dv;$$

c) Si m es fraccionario, $m = \frac{p}{q}$ (p (*) y q enteros), haciendo $v^{\frac{p}{q}} = u$:

$$v^p = u^q; \qquad [dv^p = pv^{p-1}dv] = [du^q = qu^{q-1}du],$$

de donde,

$$\left[du = d\left(v^{\frac{p}{q}}\right)\right] = \frac{pv^{p-1}dv}{qu^{q-1}} = \frac{p}{q} \,.\, \frac{v^{p-1}}{\left(v^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} dv = \frac{p}{q} v^{\frac{p}{q}-1} dv;$$

(*) Todos los radicales quedan comprendidos con $p = 1$

d) Si m es inconmesurable, siempre se puede escribir, siendo n un número conmensurable cualquiera,

$$u^m = \left(u^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

y diferenciando esta potencia n.ª,

$$d(u^m) = n\left(u^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1} d\left(u^{\frac{m}{n}}\right) = n.u^{m-\frac{m}{n}}.d\left(u^{\frac{m}{n}}\right).$$

El valor cuantitativo de esta expresión es independiente del número arbitrario n; y como éste podemos concebirle todo lo próximo que queramos al inconmensurable m, no es posible que aquel valor difiera en nada del

$$d\left(u^{\frac{m}{n}}\right) = m.u^{m-1}du.$$

20. Si todas esas variables fuesen funciones de otra considerada independiente (x, por ejemplo), *midiendo* sus diferenciales con dx, en ambos miembros, las siete reglas serán aplicables á las derivadas, puesto que todas las dd pasan á ser $D_x D_x$.

Las funciones en que no hay más operaciones que las elementales, hasta aquí consideradas, se denominan *algébricas.* Para su diferenciación y derivación basta aplicar las reglas que dejamos establecidas.

21. Cuando en las funciones entran potencias de exponente variable reciben el nombre de *trascendentes.* Como fundamental de éstas, tomaremos la *exponencial* e^x, siendo su base e el número inconmensurable

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots = 2{,}718281828\ldots,$$

que procede del desarrollo (*) de $(dx+1)^{\frac{1}{dx}}$.

(*) Por el de Taylor de $(x+1)^m$; haciendo luego $m=\frac{1}{x}$, $x = dx$.

Incrementando esta función exponencial:

$$\Delta e^x = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)\,;$$

Y, por consiguiente:

$$\frac{\Delta e^x}{\Delta x} = e^x\,\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \qquad (1)$$

Si llamamos

$$e^{\Delta x} - 1 = \alpha\,,$$

tendremos:

$$e^{\Delta x} = 1 + \alpha\,; \qquad e = (1+\alpha)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Desarrollando, y poniendo en vez de e su valor:

$$2 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots = 1 + \frac{\alpha}{\Delta x} + (1 - \Delta x)\,\frac{\alpha^2}{2\Delta x^2}$$

$$+ (1 - \Delta x)\,(1 - 2\Delta x)\,\frac{\alpha^3}{3\,!\,\Delta x^3} + \ldots\,;$$

que, evidentemente, se satisface con

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha = e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= 1\,; \\ \Delta x &= 0\,; \end{aligned}\right\}$$

y

valores que transforman la (**1**) en

$$\left.\frac{\Delta e^x}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0} = \frac{de^x}{dx} = \mathrm{D}_x e^x = e^x\,.$$

Es decir, que la función e^x goza de la notabilísima propiedad de no alterarse al derivarla con relación á su exponente x; y por lo tanto:

$$\mathrm{D}_{x^n} e^x = e^x\,.$$

$$d^n e^x = e^x . dx^n\,.$$

LECCIÓN 3.ª

DE LA CANTIDAD CON DIRECCION

Cálculo vectorial.

22. Hasta las *Lectures on Quaternions*, de Hamilton (mediados del siglo pasado), quedó incompleto el análisis de la cantidad continua; limitado en el Cálculo de Leibnitz y de Newton al de las longitudes lineales prescindiendo de sus posiciones respectivas; ó, lo que es lo mismo, considerando para todas las longitudes una dirección única. A esta recta indefinida, en que se consideran las cantidades lineales, la denominaremos *línea de acción*.

En las *diferencias* se ha podido apreciar cómo toda cantidad lineal, dentro de su línea de acción, cabe considerarla cual una Δ, y es susceptible de valer, por consiguiente, $(+nL)$ ó $(-nL)$, siendo n el número de unidades LL que abarque; según que se dirija en el sentido tomado por fundamental ó en el opuesto.

Viénese empleando desde Descartes el factor numérico $(+1)$ ó (-1) para diversificar las dos direcciones, ó sentidos opuestos que pueden seguirse en una línea de acción única considerada. A los números abstractos, *dirigidos*,

$$\frac{+nL}{L} \text{ ó } \frac{-nL}{L} \; (+n \text{ ó } -n)$$

obtenidos en la relación con la unidad fundamental dirigida, y de longitud L, los denomina Hamilton *escalares* (*scalars*), por poderse apreciar con una *escala* graduada (como la de un doble decímetro de los corrientes).

Fig. 4.ª **23.** Si tenemos en el espacio varios segmentos de recta, paralelos y con el sentido (como ▵▵) que indican las puntas de flecha y el orden de las letras de sus extremos, practíquese su adición ó *suma* añadiéndolos unos á continuación de otros, en una línea de acción paralela, con el sentido propio á cada uno de ellos, llegándose así á la *suma algébrica*

$$AD = -DA.$$

Es, si no evidente, fácilmente demostrable que en esta suma algébrica de cantidades lineales, de una misma línea de acción, el orden de colocación de los sumandos no altera la longitud ni el sentido del segmento suma.

A los segmentos rectilíneos, con dirección y sentido, los denominaremos *rectores* (de *rego,* dirigir). Acostúmbrase á denominarlos *vectores* como á los *números* de que vamos inmediatamente á ocuparnos. Esparciendo la doble acepción del sustantivo *vector* (una como *cantidad concreta*, otra como *número abstracto)* grande obscuridad en la exposición de la teoría de los *cuaternios*, parécenos conveniente el evitarla.

Cuando todos los rectores tienen líneas de acción paralelas, tomando como unidad uno cualquiera también paralelo, claro es que podrán medirse (aisladamente y sumados) en *escalares*.

Fig. 5.ª **24.** Cuando los rectores AB, BC ... CD tienen direcciones cualesquiera en el espacio, pueden *añadirse*, con su dirección y sentido propios, unos á continuación de otros; construyéndose así el contorno poligonal (abierto y alabeado en general) AB ... CD, que, si son en número de n los rectores, admitirá $n!$ formas diversas. Al rector AD, que va del origen del primero al extremo del último, se le denomina

suma sincategoremática (Rey Heredia) ó *suma geométrica* (Rèsal). Dedúcese inmediatamente de esta definición, que si el contorno es cerrado, la suma sincategoremática es nula; y, con facilidad, dos propiedades importantes de estas sumas.

Al proyectar el contorno poligonal (ortogonal ú oblicuamente) sobre un plano ó recta dados, los puntos inicial y final del contorno y de cada uno de sus rectores componentes seguirán siendo en las proyecciones, los iniciales y finales respectivos. Por consiguiente:

a) La proyección de una suma sincategoremática de rectores, sobre un plano dado, es la suma sincategoremática de los rectores proyectados.

b) La proyección de una suma sincategoremática, sobre una recta dada, es la suma algébrica de los rectores proyectados.

Como el rector-suma queda del todo precisado por tres proyecciones sobre tres ejes, no coplanares, y como estas tres proyecciones (sumas algébricas que son) no varían con el orden de colocación de sus sumandos, es evidente que las $n!$ maneras diversas de colocar los n rectores dan un rector-suma único, perfectamente definido en magnitud, dirección y sentido. Es decir, que en la suma sincategoremática, como en la algébrica (su caso particular), el orden de los sumandos no altera el resultado:

$$AD = AB + BC + \dots CD = BC + CD + \dots AB = \dots$$

Fig. 6.ª **25.** Para pasar á los números, conservando el signo $+$ su significación aditiva, hemos visto que en la suma algébrica, de rectores con una línea de acción común, sus cocientes con uno de ellos (tomado por unidad) aparecían afectados de los factores directivos $(+1)$ ó (-1). Investiguemos cuál deba ser el factor en la suma sincategoremática.

Trácese la circunferencia de radio L (unidad de longitud), y en ella, los rectores-radios

$$OA,\quad OA',\quad OB \ \text{y}\ OB',$$

con los ángulos

$$\begin{cases} AA' = \theta \\ AB = A'B' = \dfrac{\pi}{2}\,; \end{cases}$$

sentido fundamental, para estos ángulos, el trigonométrico ó *sinistrorsum.* A estas diversas unidades concretas dirigidas, las notaremos

$$\begin{cases} OA = I\,; \\ OB = J\,; \\ OA' = u\,; \\ OB' = u'; \end{cases}$$

Descomponiendo el rector OA′ en sus sumandos OE y EA′ (paralelo á OB):

$$OA' = OE + EA'.$$

Pasando á los números escalares:

$$\begin{cases} OE = \dfrac{OE}{OA}\,.\,OA = \cos\theta I\,; \\ EA' = \dfrac{EA'}{OB}\,.\,OB = \operatorname{sen}\theta J\,; \end{cases}$$

y, por consiguiente:

$$OA' = u = \left[\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{J}{I}\right] I\,.$$

Con OB′, análogamente:

$$OB' = u' = \left[-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\,\frac{J}{I}\right] I\,.$$

Si observamos ahora que el concepto de dirección es

puramente relativo, como u' se encuentra respecto de u en situación idéntica á la de J con relación I, ha de tenerse

$$\frac{u'}{u} = \frac{J}{I} = \frac{-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \frac{J}{I}}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{J}{I}}.$$

Multipliquemos la segunda igualdad por $\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{J}{I}\right)$ y tengamos cuidado (*), cuando sea preciso, con el orden de colocación de los factores. Ni en las cantidades numéricas aritméticas, ni en las escalares, como cada uno de los factores se encuentra con respecto al otro en idénticas condiciones, influye el orden. Tratándose *de rectores*, el ángulo formado al partir del uno ó del otro factor, cambia de sentido y debemos presumir que pueda llegarse á resultados diversos con la inversión de los factores.

Escribiremos siempre *el multiplicador á la derecha* (**) del multiplicando, puesto que en nuestro idioma se escribe y dice:

$$a \times b = a \text{ multiplicada por } b;$$

y, sobre todo, por una razón de más peso, que señalaremos al ocuparnos de las formas exponenciales de los *cuaternios*.

Efectuada la multiplicación que dijimos,

$$\frac{J}{I}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \left(\frac{J}{I}\right)^2 = -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \frac{J}{I};$$

que, si $\operatorname{sen}\theta \mp 0$, nos da:

$$\left(\frac{J}{I}\right)^2 = -1; \qquad \frac{J}{I} = \pm\sqrt{-1} \ldots = o''.$$

(*) Inmediatamente no le hay, pues para los factores escalares sen θ y cos θ, su colocación es indiferente.

(**) Hamilton lo escribe á la izquierda, equiparándolo á un coeficiente numérico de otros factores literales.

26. Para determinar la significación de este número $\pm\sqrt{-1}$, le representaremos provisionalmente con la letra o''. Desde luego vemos que *en todo el plano* AOB actúa sobre los rectores como un factor directivo que los hace girar noventa grados. Denomínasele, por esto, *versor cuadrante.*

Si consideramos una tercera unidad concreta dirigida (de longitud L) OC, perpendicular á las OA y OB, y hacia adelante; llamándola K, llegaremos del mismo modo á

$$\left(\frac{K}{J}\right)^2 = -1; \qquad \frac{K}{J} = \pm\sqrt{-1} \ldots = o;$$

y á

$$\left(\frac{I}{K}\right)^2 = -1; \qquad \frac{I}{K} = \pm\sqrt{-1} \ldots = o'.$$

Designando, como Hamilton, con las letras minúsculas i, j, k, á los números abstractos correspondientes á esas tres unidades concretas trirectangulares:

$$\begin{cases} \dfrac{I}{L} = i; \\ \dfrac{J}{L} = j; \\ \dfrac{K}{L} = k. \end{cases}$$

O bien:

$$\begin{cases} I = iL; \\ J = jL; \\ K = kL. \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} o = \dfrac{k}{j}; \\ o' = \dfrac{i}{k}; \\ o'' = \dfrac{j}{i}. \end{cases}$$

Tenemos, pues:

$$\left.\begin{aligned} i &= o'k\,; \\ j &= o''i\,; \\ k &= o\ j\,; \end{aligned}\right\} (a)$$

de las que

$$i = o'\,[k = o(j = o''i)] = o'.o.o''.i\,.$$

Por consiguiente, dividiendo por i (para obtener la primera, y por analogía las otras dos)

$$\left.\begin{aligned} o'o\,o'' &= +1\,; \\ o''o'\,o &= +1\,; \\ o\,o''o' &= +1\,. \end{aligned}\right\} (b)$$

Multiplicando estas (b), respectivamente, por o'', o y o':

$$\left.\begin{aligned} [o'oo''.o'' = o'o.(o'')^2 = o'o(-1) = -o'o] &= o''\,; \\ -o''o' &= o\,; \\ -oo'' &= o'\,. \end{aligned}\right\} (c)$$

Volviendo á multiplicar por o'', o y o':

$$\left.\begin{aligned} -o'(o.o = o^2 = -1) = +o' &= o''o\,; \\ o'' &= oo'\,; \\ o &= o'o''. \end{aligned}\right\} (c')$$

Repitiendo con o', o'' y o:

$$\left.\begin{aligned} +o'o' = -1 &= o''oo'\,; \\ -1 &= oo'o''\,; \\ -1 &= o'o''o\,. \end{aligned}\right\} (b')$$

Cambiemos de *incógnitas* haciendo

$$\left.\begin{aligned} i &= o\,.\,x\,, \\ j &= o'.y\,, \\ k &= o''.z \end{aligned}\right\} (d)$$

y multiplíquese la primera de las (c') por x:

$$o'x = o''ox = o''.i.$$

Por las segundas de las (a) y (d)

$$o''.i = j = o'.y;$$

luego

$$o'.x = o'.y;$$

y necesariamente

$$x = y = \dots z.$$

Quedan las igualdades (d) en la forma

$$\left.\begin{aligned} i &= o \ .x; \\ j &= o' \ .x; \\ k &= o'' .x; \end{aligned}\right\} (d')$$

Estas (d'), con las $o^2 = o'^2 = o''^2 = -1$, se reducen á

$$i^2 = j^2 = k^2 = -x^2 \qquad (e).$$

Para averiguar la significación del número, ó coeficiente de proporcionalidad, x, de las primitivas incógnitas (igualdades [d']), podemos escribir las (c'), teniendo en cuenta las (d'):

$$\frac{i}{x} = \frac{j}{x} \cdot \frac{k}{x}, \quad \text{etc.};$$

ó bien:

$$\left.\begin{aligned} ix &= j.k; \\ jx &= k.i; \\ kx &= i.j; \end{aligned}\right\}$$

Retrocediendo á las cantidades concretas

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L}} x = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}; \quad \text{etc.};$$

que equivalen á las

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}\;.\,x\mathrm{L}=\mathrm{J}\,.\,\mathrm{K}\,; \\ \mathrm{J}\;.\,x\mathrm{L}=\mathrm{K}\,.\,\mathrm{I}\;; \\ \mathrm{K}\,.\,x\mathrm{L}=\mathrm{I}\,.\,\mathrm{J}\;. \end{array}\right\}$$

Vése así que x (*) no es más que el *número* correspondiente á la unidad *arbitraria* de longitud (L), es decir, el número *uno*.

Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{l} o\;\;=i\,; \\ o'\;=j\,; \\ o''=k\,; \end{array}\right\}$$

y todas las igualdades (a), (b), (b'), (c), (c'), ..., quedan incluídas en las

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \qquad (f)\,;$$

fundamentales de todo el cálculo vectorial.

En resumen:

1.º «El número ó factor directivo $\pm\sqrt{-1}$ es la *unidad abstracta dirigida* perpendicular al plano de los rectores coplanares que se consideren, pudiendo, por consiguiente, tener cualquier dirección de las del espacio. A estas unidades abstractas dirigidas se las denomina *vectores unidades* ó *unidades vectoras*».

2.º «El cuadrado de cualquier *unidad vectora* es siempre (-1)».

3.º «En los productos de dos vectores cualesquiera, pero *perpendiculares* entre sí, por las (c) y (c'),

$$i\,.\,j=-j\,.\,i,$$

(*) La *especie continua* L puede siempre considerarse como *un número* de otras submúltiples:

$$\mathrm{L}=x\left(\mathrm{L}'=\frac{\mathrm{L}}{x}\right).$$

la inversión del orden de los factores cambia el signo del producto».

Fig. 7.ª **27.** Consideremos ahora un rector-unidad (OD) formando ángulos cualesquiera (cuya notación va en la figura) con las I, J, K, fundamentales. En el plano AODD′ se tiene, llamando H á la unidad concreta (de longitud L) dirigida según OD′ (proyección de OD sobre el plano BOC), por su descomposición en sumandos rectangulares:

$$\mathrm{OD} = \cos\alpha\,\mathrm{I} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathrm{H};$$

en el BOC:

$$\mathrm{H} = \cos\varphi\,\mathrm{J} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{K}.$$

Por consiguiente:

$$(\mathrm{OD} = u = v\,.\,\mathrm{L}) = \cos\alpha\,\mathrm{I} + \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi\,\mathrm{J} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{K};$$

ó bien, puesto que

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi &= \cos\beta,\\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi &= \cos\gamma,\end{aligned}\right\}$$

$$u = v\,.\,\mathrm{L} = \cos\alpha\,\mathrm{I} + \cos\beta\,\mathrm{J} + \cos\gamma\,\mathrm{K}.$$

Pasando á las igualdades, ó ecuaciones numéricas, es decir, dividiendo por L:

$$v = \cos\alpha\,.\,i + \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi\,.\,j + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.\,k = \cos\alpha\,.\,i + \cos\beta\,.\,j + \cos\gamma\,.\,k;$$

sencillísima función lineal que liga á cualquier vector-unidad del espacio (por medio de los escalares trigonométricos) con los trirectangulares i, j, k, *irreductibles*, que expresan las tres únicas direcciones fundamentales del espacio.

En esta forma se puede comprobar la propiedad general $v^2 = -1$. En efecto:

$$v^2 = v\,.\,v = (\cos\alpha\,.\,i + \cos\beta\,.\,j + \cos\gamma\,.\,k)(\cos\alpha\,.\,i + \cos\beta\,.\,j + \cos\gamma\,.\,k)$$

ó, efectuando la multiplicación con el cuidado advertido en el número **25**,

$$v^2 = \cos^2\alpha . i^2 + \cos\alpha\cos\beta . ji + \cos\gamma\cos\alpha . ki + \cos\alpha\cos\beta . ij +$$
$$+ \cos^2\beta . j^2 + \cos\beta\cos\gamma . kj + \cos\gamma\cos\alpha . ik + \cos\beta\cos\gamma . jk +$$
$$+ \cos^2\gamma . k^2 ;$$

ó sea

$$v^2 = \cos^2\alpha . i^2 + \cos^2\beta . j^2 + \cos^2\gamma . k^2 + \cos\beta\cos\gamma(jk + kj) +$$
$$+ \cos\gamma\cos\alpha(ki + ik) + \cos\alpha\cos\beta(ij + ji) ;$$

pero, por los teoremas resúmenes del número anterior,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$jk + kj = ki + ik = ij + ji = 0 ;$$

luego:

$$v^2 = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(-1) = -1 .$$

28. Para completar estos *principios* del cálculo vectorial fáltanos solamente comprobar cómo esos *números vectores* establecen la homogeneidad necesaria para el empleo del símbolo + como expresivo de la suma sincategoremática, así como los *escalares* lo consiguieron en la algébrica.

A los números ordinarios ó *aritméticos* los llamaremos *números* simplemente (*); á los de esas otras dos clases (con Hamilton), *escalares* ó *vectores*, respectivamente.

Los primeros (aritméticos) los representaremos con las letras n, n' ..., N, N′ ...

(*) Cuando precise poner de manifiesto ese carácter exclusivo, les antepondremos el signo ‖.

Sean los rectores:

OA ,	de longitud nL ;		ángulos	α β γ	
OA′,	»	$n'L$;	»	α' β' γ'	
.....	»	....	»	......	

Su suma sincategoremática será:

$$OA + OA' + ... = n \cdot u + n \cdot u' + ... = (n \cdot v + n' \cdot v' + ...) \cdot L$$
$$= [(n \cos \alpha + n' \cos \alpha' + ...)i + (n \cos \beta + n' \cos \beta' + ...)j$$
$$+ (n \cos \gamma + n' \cos \gamma' + ...)k] \cdot L$$

que, extendiendo á estas sumas el simbolismo usual, puede escribirse abreviadamente:

$$\Sigma\, OA = [(\Sigma n \cos \alpha)i + (\Sigma n \cos \beta)j + (\Sigma n \cos \gamma)k] \cdot L\,.$$

Por la propiedad (b) del número **24**, si a, b, c son los ángulos del rector-suma con los I, J, K, y NL su longitud absoluta:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, n \cos \alpha &= N \cos a \\ \Sigma\, n \cos \beta &= N \cos b \\ \Sigma\, n \cos \gamma &= N \cos c \end{aligned}\right\}$$

Y, consiguientemente:

$$\Sigma\, OA = N(\cos a \cdot i + \cos b \cdot j + \cos \gamma\, k)L\,;$$

ó bien, siendo W el vector de OA y w su unidad vectora:

$$\Sigma\, OA = N(w)L = WL\,;$$

resultado que nos comprueba la eficacia de estos vectores para el fin propuesto.

29. Es evidente que esa suma sincategoremática puede descomponerse en las parciales que queramos y con el orden que nos plazca, puesto que ya está en forma algébrica.

LECCIÓN 4.ª

FUNCIONES VECTORIALES—CUATERNIOS

30. De las fórmulas funtamentales (f):

$$\left.\begin{aligned} i\,.\,j &= k\,; \\ j\,.\,k &= i\,; \\ k\,.\,i &= j\,; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} ji &= -k\,; \\ i(-k) = -ik &= j\,; \\ -k\,.\,j &= i\,. \end{aligned}\right\}$$

El producto de dos unidades vectoras rectangulares (versores cuadrantes) da la tercera del sistema (establéẓcase con sentido sinistrorsum *ó con el* dextrorsum).

31. De las mismas:

$$\frac{i\,.\,j}{k^2} = \frac{k}{k^2} = \frac{k}{-1}\,; \qquad \frac{i}{j} = k^{-1} = -k\,; \qquad \frac{j}{i} = +k\,.$$

El cociente de dos versores cuadrantes, da el tercer versor invertido.

32. Las (f) dan también, para los productos ternarios de los versores cuadrantes:

$$\left.\begin{aligned} ijk = jki = kij &= -1\,; \\ jik = kji = ikj &= +1\,. \end{aligned}\right\}$$

Al variar el orden cíclico cambia de signo el producto ternario (escalar unidad), que con el primitivo es negativo.

Sea cualquiera el número de versores cuadrantes los que se multipliquen y cualquiera el orden de las multiplicaciones, el producto es ó un escalar unidad ó una unidad vectora.

33. Como los cocientes son de la forma

$$\left(\frac{j}{i}\right)^{\pm 1} = \mp j \, . \, i,$$

convertidos en productos, se les puede aplicar lo anterior.

34. Si se trata de dos unidades vectoras cualesquiera (v y v') cuyos respectivos escalares sean:

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos\alpha, \\ y = \cos\beta, \\ z = \cos\gamma, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \cos\alpha', \\ y' = \cos\beta', \\ z' = \cos\gamma'; \end{array}\right\}$$

tendremos

$$\left.\begin{array}{l} v = xi + yj + zk, \\ v' = x'i + y'j + z'k; \end{array}\right\}$$

y, por consiguiente, los productos

$$\left\{\begin{array}{ll} v\,.\,v' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - y'z)i + (zx' - xz')j & \\ \qquad + (xy' - yx')k; & (a \\ v'\,.\,v = -(xx' + yy' + zz') - (yz' - y'z)i - (zx' - xz')j & \\ \qquad - (xy' - yx')k\,. & (b \end{array}\right.$$

Pudiéramos, por la Geometría analítica *precuaternaria*, determinar los escalares de estos productos.

Ya que poseemos el algoritmo verdadero, ó completo, vale más emplearle directamente.

Fig. 8.ª Sean:

$$\left.\begin{array}{l} Oa = v, \\ Ob = v': \end{array}\right\}$$

$$Ob = Oc + cb = \left(\frac{Oc}{Oa} + \frac{cb}{Oa}\right) Oa;$$

ó bien, siendo w el versor cuadrante del plano aOb:

$$v' = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \, . \, w) v \, .$$

Luego

$$v'.v = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w)v^2 = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w)(-1)$$
$$= -(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w) \qquad (b')$$

y, en orden inverso

$$v.v' = (v\cos\theta + \operatorname{sen}\theta v.w)v = v^2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.v.w.v\,;$$

como v y w son dos unidades vectoras perpendiculares,

$$v.w = -w.v\,,$$

y, por consiguiente,

$$v.w.v = -w\ v^2 = w\,;$$

queda, puesto que $v^2 = -1$:

$$v.v' = -\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w. \qquad (a')$$

Llamando λ, μ, ν á los ángulos del w con los i, j y k:

$$w = \cos\lambda.i + \cos\mu.j + \cos\nu.k\,;$$

por consiguiente, la identificación de (a) con (a') y de (b) con (b') trae consigo las cuatro igualdades

$$\left.\begin{aligned} xx' + yy' + zz' &= \cos\theta\,; \\ yz' - y'z &= \operatorname{sen}\theta.\cos\lambda\,; \\ zx' - xz' &= \operatorname{sen}\theta.\cos\mu\,; \\ xy' - yx' &= \operatorname{sen}\theta.\cos\nu\,; \end{aligned}\right\} (c)$$

fórmulas que dan inmediatamente los cosenos directores del plano de los dos rectores, en función de los de éstos.

Tenemos, pues:

$$\begin{cases} v.v' - v'.v = 2\operatorname{sen}\theta.w \\ vv' + v'v = -2\cos\theta\,. \end{cases}$$

Si son perpendiculares, $\cos\theta = 0$; y, volvemos á hallar

$$vv' + v'v = 0; \qquad vv' = -v'v.$$

Si tienen la misma línea de acción, $\operatorname{sen}\theta = 0$; si el sentido es el mismo, $\cos\theta = +1$; si opuesto, $\cos\theta = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} v.v' = v'v \\ vv' + v'v = \mp 2 \end{array}\right\} \; v.v' = v'v = \mp 1.$$

El producto de dos unidades vectoras de igual dirección da la unidad escalar positiva, si el sentido es opuesto; la negativa, si el sentido es el mismo.

COROLARIO. *El producto de dos vectores de magnitudes cualesquiera, de igual dirección y sentido, da un escalar negativo; si el sentido es opuesto, un escalar positivo.*

35. Los cocientes de dos unidades vectoras serán:

$$\frac{v'}{v} = \frac{v'.v}{v^2} = \frac{v'.v}{-1} = -v'.v = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w;$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{v.v'}{v'^2} = \frac{v.v'}{-1} = -v.v' = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta.w.$$

Para comprobar la reciprocidad:

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.w)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta.w) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\, w^2$$
$$= \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

36. Si los vectores tienen magnitudes cualesquiera,

$$\left\{\begin{array}{l} V = n.v; \\ V' = n'.v'. \end{array}\right.$$

Por consiguiente:

$$\begin{cases} V \,.\, V' = n \,.\, n'(v \,.\, v') = -\,nn'(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\, w) \ldots = p \\ V' \,.\, V = n \,.\, n'(v' \,.\, v) = -\,nn'(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, w) \ldots = p' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V'}{V} = \dfrac{n'}{n} \,.\, \dfrac{v'}{v} = \dfrac{n'}{n}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, w) \ldots\ldots\ldots = q \\ \dfrac{V}{V'} = \dfrac{n}{n'} \,.\, \dfrac{v}{v'} = \dfrac{n}{n'}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\, w) \ldots\ldots\ldots = q^{-1} \end{cases}$$

Si llamamos φ al ángulo que la proyección del vector v (α, β, γ) sobre el plano de las jj, kk, forma con j, como en el número **27**, tendremos:

$$w = \cos\lambda\, i + \operatorname{sen}\lambda \cos\varphi\, j + \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi\, k;$$

y, por lo tanto:

$$\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta\, w = \cos \pm\, \theta \operatorname{sen}\theta\,(\cos\lambda\, i + \operatorname{sen}\lambda\cos\varphi\, j + \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\varphi\, k).$$

La forma de esas cuatro funciones vectoriales elementales, productos y cocientes de dos vectores cualesquiera, es la

$$\mp\, n^{\pm 1} \,.\, n'^{\pm 1}\,[\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta\,(w = \cos\lambda\, i + \operatorname{sen}\lambda\cos\varphi\, j + \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\varphi\, k)]\,,$$

dependiente únicamente de los cuatro números

$$N = n^{\pm 1} \,.\, n'^{\pm 1}\,,\ \theta\,,\ \lambda \text{ y } \varphi\,.$$

Denomínalas, por eso, Hamilton, *cuaternios* (quaternions). Especialmente en el cociente (q) que toma como tipo, al número

$$N = \frac{n'}{n} \ldots = T$$

lo denomina *tensor* por ser el que actuando sobre el rector de longitud nL le hace tomar la longitud n'L; y representa con la letra T.

Al escalar $T\cos\theta$, lo llama escalar del cuaternio y representa

$$\mathbf{S}q$$

siendo S una característica funcional que se lee *escalar de q.*

Al vector $(T\operatorname{sen}\theta)\,w$, lo nota

$$\mathbf{V}q \text{ (\textit{vector de} q)},$$

con estos símbolos:

$$q = \mathbf{S}q + \mathbf{V}q$$
$$p = \mathbf{S}p + \mathbf{V}p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

El cuaternio *conjugado* del q, que es el

$$T(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\, w),$$

lo nota $\mathbf{K}q$ (*conjugado de q*).

Al factor *puramente directivo* del cuaternio,

$$(\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta\, w),$$

se le denomina *versor* y expresa con la letra U:

$$q = T.U.$$

Llámase *cuaternio unidad* al proveniente de dos vectores (ó rectores) de igual longitud $(T = 1)$:

$$Q = U \begin{cases} \mathbf{S}Q = \cos\theta \\ \mathbf{V}Q = \operatorname{sen}\theta\, w \\ \mathbf{K}Q = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\, w = \dfrac{1}{Q} = Q^{-1}. \end{cases}$$

Tenemos, pues, con esta notación:

$$1)\ \begin{cases} \mathbf{S}p = \mathbf{S}p' = -n^2(\mathbf{S}q = \mathbf{S}q^{-1}); \\ \mathbf{V}p = -\mathbf{V}p' = +n^2(\mathbf{V}q = -\mathbf{V}q^{-1}). \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \mathbf{K}p = p'; \\ \mathbf{K}p' = p. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \mathbf{K}q = \frac{n'^2}{n^2} \cdot q^{-1}; \\ \mathbf{K}q^{-1} = \frac{n^2}{n'^2} \cdot q; \end{cases}$$

y sus consecuencias:

$$4)\ \begin{cases} p + p' = 2\mathbf{S}p = 2\mathbf{S}p'; \\ p - p' = 2\mathbf{V}p = -2\mathbf{V}p'. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} q + \mathbf{K}q = 2\mathbf{S}q = 2\mathbf{S}\mathbf{K}q; \\ q - \mathbf{K}q = 2\mathbf{V}q = -2\mathbf{V}\mathbf{K}q. \end{cases}$$

9.ª **37.** Subdividamos el ángulo aOb del cuaternio en m partes iguales; y consideremos los $(m+1)$ rectores unidades $(Oa, Oa_1, Oa_2, \ldots Oa_{m-1}, Ob)$. Relacionando cada uno de ellos al inmediato anterior, obtendremos los m cuaternios unidades, coplanares é iguales:

$$\frac{Oa_1}{Oa} = \cos\frac{\theta}{m} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\, v;$$

$$\frac{Oa_2}{Oa_1} = \cos\frac{\theta}{m} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\, v;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Ob}{Oa_{m-1}} = \cos\frac{\theta}{m} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\, v;$$

Multiplicando, miembro á miembro:

$$\frac{Ob}{Oa} = \mathrm{U} = \left(\cos\frac{\theta}{m} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{m} \cdot v\right)^m;$$

que puede escribirse

$$U = \left[\cos\frac{\theta}{m}\left(1 + \frac{\theta}{m}\,.\,v\right) + \cos\frac{\theta}{m}\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{m}\right)v\right]^{m}$$

ó bien, llamando

$$\frac{\theta}{m}\,.\,v = \alpha\,, \qquad \text{de donde} \qquad m = \frac{\theta}{\alpha}\,.\,v\,,$$

$$U = \left[\left(\cos\frac{\theta}{m}\left(1 + \alpha\right) + \cos\frac{\theta}{m}\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{m}\right)v\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\theta v}$$

Haciendo crecer á m indefinidamente, con $m = \infty$

$$\left.\frac{\theta}{m}\right]_{m=\infty} = d\theta\,; \qquad \left.\alpha\right]_{m=\infty} = d\alpha\,.$$

Por lo dicho en el número **12**

$$\operatorname{tang} d\theta - d\theta = 0\,,$$

no teniéndose que apreciar los infinitésimos de segundo orden; y por consiguiente,

$$\cos d\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (d\theta)^2}} = 1\,,$$

no apreciando tampoco los infinitésimos de segundo. Queda, pues, para los efectos numéricos:

$$U = \left[(1 + d\alpha)^{\frac{1}{d\alpha}}\right]^{\theta\,.\,v} = [e]^{\theta\,.\,v} = e^{\theta v}\,,$$

exponencial vectorial notabilísima.

38. Para todo el plano aOb, $v = \pm\sqrt{-1}$; luego, en él

$$U = e^{\pm\sqrt{-1}\,\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta:$$

igualdad que nos permite hallar directamente las formas exponenciales de las líneas trigonométricas, que á mediados del siglo XVIII dedujo Euler del desarrollo con la serie de Mac-Laurin de $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, $e^{\theta\sqrt{-1}}$, $e^{-\theta\sqrt{-1}}$. Desdoblándola:

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{\theta\sqrt{-1}};$$
$$\cos\theta - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{-\theta\sqrt{-1}};$$

de donde:

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2};$$
$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

(Fórmulas de Euler.)

Y también demostrar, con toda generalidad, las de Moivre. En efecto: elevándola á la n^a potencia,

$$e^{\pm n\theta\sqrt{-1}} = \cos(n\theta) \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(n\theta) = (\cos\theta \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n.$$

39. Las formas exponenciales de un cuaternio son, pues,

$$q = \mathrm{T}\,(e^{w} \overset{(*)}{=} \cos 1 + \mathrm{sen}\,1\,.\,w)^{\theta}.$$

A la unidad *directiva*, e^w, se la denomina *unidad versora* ó *versor unidad.*

(*) El arco unidad, que se denomina *radian* y cuya longitud desarrollada es la del radio unidad, corresponde á los 57° 17′ 44″, 8 ...;

$$\cos 1 = 0{,}5403021:$$
$$\mathrm{sen}\,1 = 0{,}8414710.$$

Si x, y, z, son los cosenos directores del vector unidad v

$$v = xi + yj + zk;$$

$$q = \mathrm{T}\left(e^{xi} . e^{yj} . e^{zk}\right)^{\theta};$$

$$\mathrm{U} = \left(e^{xi} . e^{yj} . e^{zk}\right)^{\theta}.$$

Fig. 10. **40.** Tracemos en la esfera de radio unidad el polígono de m lados AA_1, A_1A_2, ... $A_{m-1}A$; siendo estos lados los distintos arcos de círculos máximos θ, θ_1, θ_2, ..., θ_{m-1}, con sus sentidos propios. Para la apreciación de estos sentidos supondremos al observador en el interior de la pirámide cuyas aristas sean las unidades vectoras OA, OA_1, ... OA_{m-1}. Los versores cuadrantes (vectores unidades perpendiculares á los planos) de los círculos máximos correspondientes á θ, θ_1 ... constituirán las aristas de la pirámide cuyo polígono base es el polar del propuesto. Los cuaternios unidades correspondientes, llamando λ_1, λ_2, λ_3 ..., λ_m á estos versores cuadrantes, habrán de ser:

$$\frac{OA_1}{OA} = e^{\theta\lambda_1};$$

$$\frac{OA_2}{OA_1} = e^{\theta_1\lambda_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{OA}{OA_{m-1}} = e^{\theta_{m-1}\lambda_m}.$$

Multiplicándolos:

$$+1 = e^{\theta\lambda_1 + \theta_1\lambda_2 + \ldots \theta_{m-1}\lambda_m}.$$

En la multiplicación de exponenciales de igual base se suman los exponentes. Como en las sumas (para todos los

que escribimos de izquierda á derecha) los sumandos se van agregando á la derecha; y á esta operación aditiva corresponde en el primer miembro la de multiplicar, esa fué la razón de mayor peso que nos hizo, en los productos, escribir los multiplicadores á la derecha, contra el uso de Hamilton. Para que la exponencial producto valga la unidad, es preciso que el exponente sea nulo; luego

$$\theta\lambda_1 + \theta_1\lambda_2 + \dots \theta_{m-1}\lambda_m = 0;$$

y, por consiguiente:

$$\theta_{n-1}(-\lambda_m) = \theta\lambda_1 + \theta_1\lambda_2 + \dots \theta_{m-2}\lambda_{m-1};$$

y vemos que los versores cuadrantes λ_1, λ_2, λ_m extienden á los arcos la suma sincategoremática, puesto que el vector

$$\theta_{m-1}(-\lambda_m)$$

corresponde al arco de círculo máximo que va del origen del AA_1 al extremo del $A_{m-2}\,A_{m-1}$. Estos vectores pueden considerarse ó circulares, según dichos arcos, ó bien rectilíneos (θ en *radianes*, de la primer circunferencia por supuesto) con la dirección y sentido de la unidad vectora λ (radio polar de su círculo máximo). De considerarlos circulares hay que tener muy en cuenta que las unidades vectoras λ_1, λ_2 ... no tienen la *dirección* de los arcos. La homogeneidad, para operar algébricamente, sólo existe con los verdaderos rectores rectilíneos de magnitudes $\theta\theta$ y direcciones y sentidos de las $\lambda\lambda$ correspondientes.

41. Podemos ya ver en el espacio cómo

$$U.U' \mp U'\,U.$$

Si llamamos á los *vectores-circulares*

$$AB = BB' = \theta\lambda \ = \varphi; \qquad AC \ = \theta''\lambda'' = \varphi'';$$
$$BC = C'B = \theta'\lambda' = \varphi'; \qquad C'B' = \theta'''\lambda''' = \varphi''';$$

tendremos, para las sumas sincategoremáticas

$$\varphi'' = \varphi + \varphi'\,; \qquad \theta''\lambda'' = \theta\lambda + \theta'\lambda'\,;$$

$$\varphi''' = \varphi' + \varphi\,; \qquad \theta'''\lambda''' = \theta'\lambda' + \theta\lambda\,.$$

$$\mathrm{U} = e^{\theta\lambda} \qquad \mathrm{U.U'} = e^{\theta\lambda + \theta'\lambda'}$$

$$\mathrm{U'} = e^{\theta'\lambda'} \qquad \mathrm{U'.U} = e^{\theta'\lambda' + \theta\lambda}$$

Como ni los arcos θ'' y θ''' (correspondientes á los AC y C'B' de los triángulos ABC y C'BB') son iguales, ni los versores cuadrantes de sus círculos máximos (λ'' y λ''') tampoco:

$$\varphi'' \neq \varphi'''\,; \qquad \theta\lambda + \theta'\lambda' \neq \theta'\lambda' + \theta\lambda\,.$$

LECCIÓN 5.ª

DIFERENCIACIÓN VECTORIAL

12. Generalizadas las operaciones del Álgebra á todas las direcciones del espacio, con el transcendental descubrimiento por Hamilton de las unidades vectoras, claro es que esta generalización abarca á las $\Delta\Delta$ y por ende á las *dd.*

12. **13.** Consideremos un rector, $R = \rho L$, variando desde OA á OB; ó sea de ρL á $\rho' L$. De aquí en adelante, los vectores de los distintos rectores, $R, R', R'', \ldots$, los escribiremos $\rho, \rho', \rho'' \ldots$; sus unidades vectoras, $v, v', v'' \ldots$; los números, $n, n', n'' \ldots$

En el triángulo OAB, se tendrá, por suma vectorial:

$$(OA + AB = \rho L + AB) = OB = \rho' L;$$

de donde

$$AB = (\rho' - \rho)L = R' - R = \Delta R = \Delta\rho . L .$$

Descomponiendo el *rector-diferencia*, AB, en sus dos sumandos rectangulares de la figura:

$$AB = Aa + aB = \left(1 + \frac{aB}{Aa}\right) Aa .$$

En el sistema trirectangular que adoptamos, según se ve

en la figura, $i = u$ (vector unidad dirigido según Ba), $j = v$; $k = w$

$$\Delta R = AB = \left(1 + \frac{\text{longitud } aB}{\text{longitud } Aa} . w\right) Aa .$$

Ahora bien:

$$Aa = (\text{longitud } Oa - \text{longitud } OA) v = (n' \cos \varphi - n) L v$$
$$= (n' \cos \varphi - n) v L ;$$

y, por consiguiente,

$$\text{longitud } \overline{Aa} = (n' \cos \varphi - n) L.$$

Además:

$$\text{longitud } \overline{aB} = \overline{OB} \text{ sen } \varphi = n' \text{ sen } \varphi . L;$$

luego:

$$\Delta R = AB = (1 + \frac{n' \text{ sen } \varphi}{n' \cos \varphi - n} w)(n' \cos \varphi - n) v L$$
$$= (n' \cos \varphi - n + n' \text{ sen } \varphi . w) v L .$$

Pasando, de esta igualdad *geométrica*, á ecuación numérica con unidad (vL):

$$\frac{\Delta R}{vL} = n' \cos \varphi - n + n' \text{ sen } \varphi . w .$$

Por la significación dè la caracteríscа Δ:

$$n' - n = \Delta n ;$$

y, por lo tanto:

$$n' = n + \Delta n ,$$

$$\frac{\Delta R}{vL} = n(\cos \varphi - 1) + \Delta n \cos \varphi + (n + \Delta n) \text{ sen } \varphi . w$$
$$= \Delta n \cos \varphi + n \text{ sen } \varphi . w + n(\cos \varphi - 1) + \Delta n \text{ sen } \varphi . w .$$

Para pasar á la *diferencial* correspondiente recordaremos que, por el número **12**, no teniendo que apreciar los infinitésimos de segundo orden, por adoptar unidades de primero:

$$\operatorname{tang}(d\varphi) = d\varphi$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \cos(d\varphi) &= \frac{1}{+\sqrt{1+(\operatorname{tang} d\varphi)^2}} = \frac{1}{+\sqrt{1+d\varphi^2}} = +1\,; \\ \operatorname{sen}(d\varphi) &= \frac{\operatorname{tang}(d\varphi)}{+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 d\varphi}} = \frac{d\varphi}{+\sqrt{1+d\varphi^2}} = d\varphi\,. \end{aligned}\right\}$$

Con estos valores, siendo ε el infinitésimo de primer orden tomado por unidad:

$$\frac{dR}{\varepsilon v L}\,.\,\varepsilon = \left[\frac{dn}{\varepsilon} + \frac{nd\varphi}{\varepsilon}\,.\,w\right]\varepsilon\,,$$

que, sobreentendiéndose siempre que se trata de los valores *concretos*, se escribe abreviadamente:

$$\frac{dR}{vL} = dn + nd\varphi\, w\,;$$

ó multiplicando por v,

$$\frac{dR}{L} = dn\,.\,v + nd\varphi\,(-u)\,.$$

ó también, puesto que $R = \rho L$ y L es un factor constante:

$$d\rho = dn\, v - nd\varphi\, u \qquad (\mathbf{1}).$$

Como v y u son las unidades vectoras perpendiculares entre sí, del sistema que dijimos, los dos términos del segundo miembro de esta ecuación, no son más que los dos

sumandos rectangulares del vector infinitésimo $d\rho$; los escribiremos $d_1\rho, d_2\rho$; nombrándolos respectivamente *diferencial radial* y *diferencial circular* (*). Es decir,

$$d\rho = d_1\rho + d_2\rho.$$

43. Cuando no varía la dirección, $d\varphi = 0$:

$$d\rho = d_1\rho = dn.v.$$

Estas eran las únicas diferenciales que se conocían cuando el análisis matemático no había pasado de los números escalares, se consideraba á la unidad vectorial (v) como (± 1), y se llamaban *imaginarias* á las cantidades más *reales* posibles. Esas diferenciales de los textos corrientes no son más que los escalares

$$dn = \frac{d_1\rho}{v}.$$

Si, permaneciendo invariable la longitud nL, solamente varía la posición, $dn = 0$:

$$d\rho = d_2\rho = -nd\varphi.u = +\frac{nd\varphi}{u}.$$

44. La *diferencial vectorial*, ó completa, podemos escribirla

$$d\rho = d_1\rho + d_2\rho = \left(\frac{dn}{n} + d\varphi\, w\right)nv = \left(\frac{dn}{n} + d\varphi\, w\right)\rho \quad (2);$$

ó bien

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dn}{n} + d\varphi\, w \qquad (3).$$

45. Suponiendo la figura 12 como representativa de las

(*) Por ser la que, relacionada con el infinitésimo de tiempo, da la velocidad que se dice en Cinemática de *circulación*.

variaciones infinitésimas simultáneas de ρ n y φ; en el triángulo *infinitésimo* ABa, rectángulo en a, si se llama, según es costumbre, ds al número $\frac{AB}{|v_{AB}}$:

$$d_1\rho = Aa = ds \cos aAB\, v\,,$$

$$d_2\rho = aB = ds \operatorname{sen} aAB\,(-u) = ds \operatorname{sen} aAB.w.v\,;$$

y obtenemos el *cuaternio diferencial*

$$\frac{d\rho}{v} = ds\,(\cos aAB + w \operatorname{sen} aAB) = ds\, e^{\widehat{aAB}\,.\,w}.$$

ó llamando θ al ángulo aAB:

$$\frac{d\rho}{v} = ds\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, w) = ds\,.\,e^{\theta w} \qquad (4);$$

ó sea, con notación *hamiltoniana:*

$$\mathbf{S}\frac{d\rho}{v} = ds\, \cos\theta\,; \qquad \mathbf{T}\frac{d\rho}{v} = ds\,;$$

$$\mathbf{V}\frac{d\rho}{v} = ds \operatorname{sen}\theta\, w\,; \qquad \mathbf{U}\frac{d\rho}{v} = e^{\theta w}.$$

El *tensor* $\mathbf{T}\frac{d\rho}{v} = ds$ no es más que el elemento *(numérico)* infinitésimo de la línea que va describiendo el extremo de los rectores RR cuando su origen permanece invariable, ó se los hace *coiniciales*.

46. Si llamamos x, y, z, á los escalares proyecciones del $\frac{\rho}{v}$ sobre tres ejes de referencia invariables, trirectangulares, y de los i, j, k, por las propiedades de las sumas sincategoremáticas ó vectoriales:

$$\rho = xi + yj + zk$$

$$\rho' = x'i + y'j + z'k$$

y, por consiguiente,

$$d\rho = \rho' - \rho = (x' - x)i + (y' - y)j + (z' - z)k$$
$$= dx\, i + dy\, j + dz\, k \qquad (5);$$

que podía escribirse directamente, fijándonos en que $d\rho$ es la diagonal del paralelipípedo cuyas tres aristas son dx, dy y dz. O bien, diferenciando ρ; puesto que i, j, k, son factores invariables ó constantes.

47. Es evidente que, extendido el algoritmo algébrico con las unidades vectoras á todo el espacio, todas las reglas de la segunda lección son aplicables á las diferenciales vectoriales. Debiéndose únicamente, en las de la multiplicación, de tener el cuidado, que tácitamente tuvimos, de conservar el orden de los factores.

48. Volviendo á la forma *cuatérnica* (**4**)

$$\frac{d\rho}{v} = ds(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta . w = dn + nd\varphi . w\,,$$

como los cosenos directores de ρ son

$$\frac{x}{n}, \qquad \frac{y}{n}, \qquad \frac{z}{n},$$

y los de ρ'

$$\frac{x'}{n'}, \qquad \frac{y'}{n'}, \qquad \frac{z'}{n'},$$

las fórmulas (c) del número **34**, nos darán para los cosenos directores de w

$$\cos\lambda = \frac{\frac{y}{n} . \frac{z'}{n'} - \frac{y'}{n'} . \frac{z}{n}}{\operatorname{sen}(d\varphi)} = \frac{yz' - y'z}{nn'd\varphi};$$

$$\cos\mu = \frac{zx' - xz'}{nn'd\varphi};$$

$$\cos\nu = \frac{xy' - yx'}{nn'd\varphi};$$

que por ser

$$x' = x + dx,$$
$$y' = y + dy,$$
$$z' = z + dz,$$
$$n' = n + dn,$$

se reducen á

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{ydz - zdy}{n^2d\varphi}; \\ \cos\mu &= \frac{zdx - xdz}{n^2d\varphi}; \\ \cos\nu &= \frac{xdy - ydx}{n^2d\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Por consiguiente,

$$w = \frac{ydz - zdy}{n^2d\varphi}\,i + \frac{zdx - xdz}{n^2d\varphi}\,j + \frac{xdy - ydx}{n^2d\varphi}\,k;$$

que transforma el cuaternio diferencial (**4**) en

$$\frac{d\rho}{v} = dn + \frac{ydz - zdy}{n}\,i + \frac{zdx - xdz}{n}\,j + \frac{xdy - ydx}{n}\,k \qquad (7).$$

Es decir,

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\mathbf{S}\frac{d\rho}{v} = \frac{d_1\rho}{v} = dn \\ &\mathbf{V}\frac{d\rho}{v} = \frac{d_2\rho}{v} = ds \operatorname{sen}\theta\, w = \frac{ydz - zdy}{n}\,i + \frac{zdx - xdz}{n}\,j + \\ &\qquad + \frac{xdy - ydx}{n}\,k. \end{aligned}\right.$$

Como comprobación, y ejercicio útil de operaciones vectoriales elementales, multiplicando la (**7**) por

$$v = \frac{x}{n}\,i + \frac{y}{n}\,j + \frac{z}{n}\,k,$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1, & ij = k, & ik = -j, \\ ji = -k, & j^2 = -1, & jk = i, \\ ki = j, & kj = -i, & k^2 = -1; \end{array}$$

se transforma aquella (7) en la

$$d\rho = \left[\frac{x}{n} dn + \frac{(y^2 + z^2)dx - x(ydy + zdz)}{n^2}\right] i +$$

$$+ \left[\frac{y}{n} dn + \frac{(z^2 + x^2)dy - y(zdz + xdx)}{n^2}\right] j +$$

$$+ \left[\frac{z}{n} dn + \frac{(x^2 + y^2)dz - z(xdx + ydy)}{n^2}\right] k;$$

y con

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2,$$

que diferenciada da

$$xdx + ydy + zdz = ndn,$$

en

$$d\rho = dx.i + dy.j + dz.k.$$

Los cosenos directores de $d\rho$ (que pueden escribirse directamente por ser dx, dy y dz los tres escalares proyecciones de ds), son, pues:

$$\frac{dx}{\| ds}, \quad \frac{dy}{\| ds}, \quad \frac{dz}{\| ds}$$

$$\| ds = \| \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

49. Para relacionar los dos sumandos diferenciales, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} d_1\rho = dn.v; \\ d_2\rho = nd\varphi(-u); \end{array}\right\} \frac{d_1\rho}{d_2\rho} = \frac{dn}{nd\varphi} \cdot \frac{v}{-u} = -\frac{dn}{nd\varphi} w \qquad (9),$$

igualdad que liga aquellos sumandos con las diferenciales escalares dn y $nd\varphi$ y el versor cuadrante w.

La diferencial completa, en función de sus sumandos rectangulares, puede también escribirse

$$d\rho = \left(1 + \frac{nd\varphi}{dn}\, w\right) d_1\rho = \left(1 - \frac{dn}{nd\varphi}\, w\right) d_2\varphi \qquad \textbf{(10)}.$$

50. Para aplicar la serie de Taylor á las funciones vectoriales, fijémonos primeramente en que, por la relatividad del concepto directivo ó de posición, tanto monta suponer variando á los rectores RR é invariable al sistema i, j, k de referencia, como suponer invariable al rector R y adjudicar la variación al sistema; y luego que, de esta manera, un rector único puede representar á todos los RR posibles con adscribir la variación á su vector unidad v.

Como la cantidad numérica más general posible ha de provenir de operaciones con la fundamental vectorial, síguese de todo ello que la función más general *posible* es la

$$f(\rho)$$

representando, según es costumbre, con la característica f el conjunto de operaciones á que se somete el vector ρ. Podemos escribirla, puesto que $\rho = nv$:

$$f(nv).$$

Con la consideración de la invariabilidad de la posición de ρ (variando v únicamente por la variación relativa del sistema i, j, k) podemos á la variación radial ($d_1\rho$) aplicarle, estableciendo la equicrescencia, todo lo expuesto en el número **7** para la de la variable equicrescente x. Lo que allí era $\frac{dx}{\mathrm{L}}$ es aquí $\frac{d_1\rho = dn\mathrm{L}v}{\mathrm{L}v} = dn$. La serie de Taylor toma la forma:

$$f(\rho+\Delta\rho)=f(\rho)+f'(\rho)\frac{d\rho}{dn}\Delta n+f''(\rho)\frac{d^2\rho}{dn^2}\frac{\Delta n^2}{2!}+\ldots \quad \textbf{(11)};$$

siendo

$$f'(\rho)=\frac{d\,f(\rho)}{d\rho}; \qquad f''(\rho)=\frac{d\,f'(\rho)}{d\rho}; \qquad \text{etc.}$$

51. Teníamos en el número **49**

$$d\rho=\left(1+\frac{nd\varphi}{dn}w\right)d_1\rho.$$

Dividiendo por *dn*:

$$\frac{d\rho}{dn}=\left(1+\frac{nd\varphi}{dn}w\right)v=v-\frac{nd\varphi}{dn}u.$$

Por la equicrescencia de n, dn es constante. Además, refiriéndonos al sistema *natural* (u, v, w), este sistema es *invariable* con respecto á las posiciones *relativas* cualesquiera de ρ y de $\Delta\rho$. En otros términos, en la variación relativa que analizamos, u, v y w, son constantes.

Para las infinitésimasó diferenciales, aplicando las reglas, sabido esto:

$$d\frac{d\rho}{dn}=\frac{d(d\rho)}{dn}=\frac{d^2\rho}{dn}=-\left(d\varphi+\frac{nd^2\varphi}{dn}\right)u;$$

$$\frac{d^2\rho}{dn^2}=-\left(\frac{d\varphi}{dn}+\frac{nd^2\varphi}{dn^2}\right)u;$$

$$d\frac{d^2\rho}{dn}=\frac{d^3\rho}{dn}=-\left(2d^2\varphi+\frac{nd^3\varphi}{dn}\right)u;$$

$$\frac{d^3\rho}{dn^3}=-\left(2\frac{d^2\varphi}{dn^2}+\frac{nd^3\varphi}{dn^3}\right)u;$$

$$d\,\frac{d^3\rho}{dn}=\frac{d^4\rho}{dn}=-\left(3d^3\varphi+\frac{nd^4\varphi}{dn}\right)u\,;$$

$$\frac{d^4\rho}{dn^4}=-\left(3\,\frac{d^3\varphi}{dn^3}+\frac{nd^4\varphi}{dn^4}\right)u\,;$$

....

$$d\frac{d^{p-1}\rho}{dn}=\frac{d^p\rho}{dn}=-\left[(p-1)d^{p-1}\varphi+\frac{nd^p\varphi}{dn}\right]u\,;$$

$$\frac{d^p\rho}{dn^p}=-\left[(p-1)\,\frac{d^{p-1}\varphi}{dn^{p-1}}+\frac{nd^p\varphi}{dn^p}\right]u\,.$$

Llevando estos valores á la (**11**), queda:

$$f(\rho+\Delta\rho)=f(\rho)-[f'(\rho)n\,\frac{d\varphi}{dn}\,\Delta n+f''(\rho)\left(\frac{d\varphi}{dn}+n\,\frac{d^2\varphi}{dn^2}\right)\frac{\Delta n^2}{2}+$$

$$+f'''(\rho)\left(2\,\frac{d^2\varphi}{dn^2}+n\,\frac{d^3\varphi}{dn^3}\right)\frac{\Delta n^3}{3\,!}+...]u+f'(\rho)\Delta n.v\,.$$

52. Si hacemos ahora $\rho=0$; $n=0$; $\Delta n=n$; con la notación simbólica corriente:

$$f(\Delta\rho)=f(0)-[f''(0)\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0\frac{n^2}{2}+2f'''(0)\left(\frac{d^2\varphi}{dn^2}\right)_0\frac{n^3}{3\,!}+$$

$$+\,3f^{\text{IV}}(0)\left(\frac{d^3\varphi}{dn^3}\right)\frac{n^4}{4!}+...]u+f'(0)n.v\,.$$

Ahora bien: la función $\Delta\rho$, con toda su generalidad, no es más que la misma variable vectorial general ρ; y queda la serie:

$$f(\rho)=f(0)-[f''(0)\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0\frac{n^2}{2}+2f'''(0)\left(\frac{d^2\varphi}{dn^2}\right)_0\frac{n^3}{3!}+$$

$$+\,3f^{\text{IV}}(0)\left(\frac{d^3\varphi}{dn^3}\right)_0\frac{n^4}{4\,!}+...]u+f'(0)n.v\,.$$

Si llamamos abreviadamente á los escalares,

$$s_1 = f(0),$$
$$s_2 = -[f''(0)\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 \frac{n^2}{2} + 2f'''(0)\left(\frac{d^2\varphi}{dn^2}\right)\frac{n^3}{3!} + \ldots];$$
$$s_3 = f'(0)n:$$

$$f(\rho) = s_1 + (s_2 u + s_3 v) = s_1 + \mathrm{S}u'.$$

Es decir, que:

53. *La función vectorial más general posible ha de ser necesariamente un cuaternio.*

Se reducirá á un vector ($\mathrm{S}u'$) si $f(0) = 0$.

COROLARIO. *El cuaternio es la forma más general de la cantidad mensurada ó relativa.*

Comprende, con $\mathbf{V}q = 0$, al *escalar;* con $\mathbf{U}q = 1$, al *número*.

54. En cualquier fenómeno *continuo* cuyas variaciones mensuradas analicemos, habrán de tener lugar éstas sobre *el fondo* (*) común á toda variación *en acto*, que se denomina *tiempo*.

A cada valor *numérico* (t) del tiempo, á partir de un origen arbitrario, corresponderán precisos y determinados valores de n y de φ; y siempre podremos expresar el *número* n y el *escalar* φ en función del *número* t. Eliminando el número t entre ambas funciones, obtendremos *la ley* que liga la variación de φ á la de n; ó sea, una cierta función escalar,

$$\varphi = \psi(n),$$

que por sucesivas derivaciones nos dará, con notación de Lagrange,

$$\frac{d^m\varphi}{dn^m} = \psi^{(m)}(n).$$

(*) El *espacio* lo es de las variaciones *en potencia*, ó posibles.

LECCIÓN 6.ᴬ

FUNCIONES CIRCULARES É HIPERBÓLICAS

. 13. **55**. *Funciones circulares.*—En el círculo referido á un sistema de *ii*, *jj* central, siendo

$$\varphi = \text{ángulo} = \frac{\text{escalar del arco AC desarrollado}}{\text{longitud del radio}},$$

se asignan las denominaciones y símbolos (trigonométricos) siguientes, á los distintos escalares:

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} = \cos\varphi\,; \qquad \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OA}} = \operatorname{senver}\varphi\,;$$

$$\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OC}} = \sec\varphi\,;$$

$$\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{OB}} = \operatorname{sen}\varphi\,; \qquad \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{OB}} = \operatorname{tang}\varphi\,.$$

Con este simbolismo funcional, llamando v al vector unidad del radio OC:

$$\left|\begin{array}{ll} \mathrm{OD} = \cos\varphi . i\,; & \mathrm{DA} = \operatorname{senver}\varphi . i\,; \\ \mathrm{OE} = \sec\varphi . v\,; & \\ \mathrm{DC} = \operatorname{sen}\varphi . j\,; & \mathrm{AE} = \operatorname{tang}\varphi . j\,; \end{array}\right.$$

Tenemos además, para valores de los versores:

$$\frac{v}{i} = e^{\phi k},$$

$$\frac{j}{v} = e^{\phi' k},$$

los ángulos φ' y φ, ligados por la $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$, se dicen *complementarios*, el uno del otro. Por las fórmulas de Euler deducidas en el número **38**

$$2 \cos \varphi = e^{\phi k} + e^{-\phi k}$$

$$2 \operatorname{sen} \varphi . k = e^{\phi k} - e^{-\phi k};$$

y también se tiene

$$\frac{v}{i} \frac{j}{v} = \frac{j}{i} = k = e^{\phi k} e^{\phi' k} = e^{(\phi + \phi')k} = e^{\frac{\pi}{2} k} = \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} . k.$$

Es decir, que

$$e^{\phi' k} = e^{-\phi k} . k \qquad (a);$$

y por consiguiente, como $k^2 = -1$,

$$e^{-\phi' k} = - e^{\phi k} . k \qquad (b).$$

Tras estos preliminares estamos ya en disposición de determinar los valores de todas las líneas trigonométricas con exponenciales vectoriales. Siendo los triángulos OAE y ODC polígonos cerrados, es evidente por la definición de suma sincategoremática, ya convertida en vectorial, que

$$OA + AE + EO = 0;$$

$$OD + DC + CO = 0;$$

ó, dividiendo por L:

$$i + \operatorname{tang}\varphi . j + (-\sec\varphi . v) = i + \operatorname{tang}\varphi\ j - \sec\varphi . v = 0;$$

$$\cos\varphi . i + \operatorname{sen}\varphi . j - v = 0; \qquad v = \cos\varphi . i + \operatorname{sen}\varphi . j;$$

y eliminando v:

$$i + \operatorname{tang}\varphi . j = \sec\varphi\ \cos\varphi . i + \sec\varphi\ \operatorname{sen}\varphi . j,$$

que, por la irreductibilidad de las unidades i, j, nos da

$$1 = \sec\varphi . \cos\varphi$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \sec\varphi . \operatorname{sen}\varphi .$$

De la primera:

$$\cos\varphi = \sec^{-1}\varphi; \qquad \sec\varphi = \cos^{-1}\varphi .$$

Dividiendo una por otra, para eliminar $\sec\varphi$,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{sen}\varphi . \sec\varphi .$$

Por lo tanto:

$$\sec\varphi = \frac{2}{e^{\varphi k} + e^{-\varphi k}} = 2\frac{e^{\varphi k}}{1 + e^{2\varphi k}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{e^{\varphi k} - e^{-\varphi k}}{(e^{\varphi k} + e^{-\varphi k})k} = \frac{1 - e^{2\varphi k}}{1 + e^{2\varphi k}}k$$

$$\operatorname{senver}\varphi = 1 - \cos\varphi = \frac{2 - e^{\varphi k} - e^{-\varphi k}}{2}$$

$$= 2\left(\frac{e^{\frac{\varphi k}{2}} - e^{-\frac{\varphi k}{2}}}{2k}\right)^2 = 2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Para las *colíneas* (líneas del complementario φ'), por las (*a*) y (*b*):

$$\operatorname{sen} \varphi' = \frac{e^{\varphi' k} - e^{-\varphi' k}}{2k} = \frac{(e^{-\varphi k} + e^{\varphi k})k}{2k} = \frac{e^{\varphi k} + e^{-\varphi k}}{2} = \cos \varphi ;$$

$$\cos \varphi' = \frac{e^{\varphi' k} + e^{-\varphi' k}}{2} = \frac{(e^{-\varphi k} - e^{\varphi k})k}{2} = \frac{e^{\varphi k} - e^{-\varphi k}}{2k} = \operatorname{sen} \varphi ;$$

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \cot \varphi = \frac{e^{2\varphi k} + 1}{e^{2\varphi k} - 1}\, k ;$$

$$\sec \varphi' = \frac{1}{\cos \varphi'} = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} = \operatorname{cosec} \varphi = 2\, \frac{e^{\varphi k} k}{e^{2\varphi k} - 1} ;$$

$$\operatorname{senver} \varphi' = 1 - \cos \varphi' = 1 - \operatorname{sen} \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \operatorname{cosver} \varphi =$$

$$= 2 \left(\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2} \right)^2 .$$

56. *Derivación de las funciones circulares.*—Aplicando las reglas y fórmulas de la lección segunda:

I.

$$D_\varphi(\operatorname{sen} \varphi) = D_\varphi \frac{e^{\varphi k} - e^{-\varphi k}}{2k} = \frac{1}{2k} \left[D_\varphi(e^{\varphi k}) - D_\varphi(e^{-\varphi k}) \right]$$

$$= \frac{1}{2k} \left[D_{\varphi k} e^{\varphi k} . D_\varphi \varphi k - D_{-\varphi k} e^{-\varphi k} . D_\varphi(-\varphi k) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\varphi k} + e^{-\varphi k} \right) = \cos \varphi .$$

II.

$$D_\varphi(\cos \varphi) = D_\varphi \frac{e^{\varphi k} + e^{-\varphi k}}{2} = \frac{-1}{2k} \left(e^{\varphi k} - e^{-\varphi k} \right) = -\operatorname{sen} \varphi .$$

III.

$$D_\varphi(\sec\varphi) = D_\varphi(\cos\varphi)^{-1} = -1(\cos\varphi)^{-2}\,.\,D_\varphi\cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \operatorname{tang}\varphi . \sec\varphi .$$

IV.

$$D_\omega(\operatorname{senver}\varphi) = D_\varphi(1 - \cos\varphi) = \operatorname{sen}\varphi .$$

V.

$$D_\varphi(\operatorname{tang}\varphi) = D_\varphi(\operatorname{sen}\varphi . \sec\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi} + \cos\varphi \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi .$$

VI.

$$D_\varphi(\operatorname{cosec}\varphi) = D_\varphi(\operatorname{sen}\varphi)^{-1} = -\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = -\cot\varphi . \operatorname{cosec}\varphi .$$

VII.

$$D_\varphi(\operatorname{cosver}\varphi) = D_\varphi(1 - \operatorname{sen}\varphi) = -\cos\varphi .$$

VIII.

$$D_\varphi(\cot\varphi) = D_\varphi(\cos\varphi . \operatorname{cosec}\varphi) = \cos\varphi \frac{-\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2\varphi .$$

57. Para que puedan apreciarse las ventajas del algoritmo completo *(vectorial)* sobre el clásico *(escalar)*, trataremos ligeramente algunas fórmulas trigonométricas. Por los estudios preparatorios ya se conoce la obtención con las fórmulas *vectoriales* de Moivre de los senos y cosenos de los arcos múltiplos de otro de líneas conocidas. Añadamos algunas otras:

$$e^{(a\pm b)k} = \cos(a \pm b) + k \operatorname{sen}(a \pm b)$$
$$= e^{ak} \cdot e^{\pm bk} = (\cos a + k \operatorname{sen} a)(\cos b \pm k \operatorname{sen} b)$$
$$= \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + k(\operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a);$$

que por la identificación de los escalares y la de los vectores, se desdobla en

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$
$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a.$$

Del mismo modo:

$$e^{(a+b+c)k} = \cos(a+b+c) + k \operatorname{sen}(a+b+c) = e^{ak} \cdot e^{bk} \cdot e^{ck}$$
$$= (\cos a + k \operatorname{sen} a)(\cos b + k \operatorname{sen} b)(\cos c + k \operatorname{sen} c)$$
$$= \cos a \cos b \cos c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos a$$
$$- \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos b + k(- \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$$
$$+ \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \cos a \cos b);$$

que, por identificación de los cuaternios, se desdobla en

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c$$
$$- \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos a - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos b;$$
$$\operatorname{sen}(a+b+c) = - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} a \cos b \cos c$$
$$+ \operatorname{sen} b \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \cos a \cos b.$$

Análogamente procederíamos con mayor número de sumandos.

$$2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(e^{\frac{p+q}{2}k} - e^{-\frac{p+q}{2}k}\right)\left(e^{\frac{p-q}{2}k} + e^{-\frac{p-q}{2}k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(e^{pk} - e^{-qk} + e^{qk} - e^{-pk}\right) = \frac{e^{pk} - e^{-pk}}{2k} + \frac{e^{qk} - e^{-qk}}{2k} =$$

$$= \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q.$$

$$2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} =$$

$$= \frac{1}{2k} \left(e^{\frac{p+q}{2} k} + e^{-\frac{p+q}{2} k} \right) \left(e^{\frac{p-q}{2} k} - e^{-\frac{p-q}{2} k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2k} \left(e^{pk} + e^{-qk} - e^{qk} - e^{-pk} \right) = \frac{e^{pk} - e^{-pk}}{2k} - \frac{e^{qk} - e^{-qk}}{2k} =$$

$$= \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q \, .$$

$$2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{p+q}{2} k} + e^{-\frac{p+q}{2} k} \right) \left(e^{\frac{p-q}{2} k} + e^{-\frac{p-q}{2} k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{pk} + e^{-qk} + e^{qk} + e^{-pk} \right) = \frac{e^{pk} + e^{-pk}}{2} + \frac{e^{qk} + e^{-qk}}{2} =$$

$$= \cos p + \cos q \, .$$

$$- 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} =$$

$$= + \frac{1}{2} \left(e^{\frac{p+q}{2} k} - e^{-\frac{p+q}{2} k} \right) \left(e^{\frac{p-q}{2} k} - e^{+\frac{p-q}{2} k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{pk} - e^{-qk} - e^{qk} + e^{-pk} \right) = \frac{e^{pk} + e^{-pk}}{2} - \frac{e^{qk} + e^{-qk}}{2} =$$

$$= \cos p - \cos q \, .$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{p+q}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{p-q}{2} = \cos^2 \frac{p-q}{2} - \cos^2 \frac{p+q}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(e^{\frac{p-q}{2} k} + e^{-\frac{p-q}{2} k} \right)^2 - \left(e^{\frac{p+q}{2} k} + e^{-\frac{p+q}{2} k} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{pk} \left(e^{-qk} - e^{qk} \right) - e^{-pk} \left(e^{qk} - e^{-qk} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{-4} \left(e^{pk} - e^{-pk} \right) \left(e^{qk} - e^{-qk} \right) = \operatorname{sen} p . \operatorname{sen} q \, .$$

Fig. 14. **58.** Consideremos ahora, en vez del círculo, la hipérbola equilátera de la figura. Los escalares se escriben y leen como sigue:

$$\frac{OD}{OA} = Ch\,\varphi, \qquad \textit{coseno hiperbólico de } \varphi;$$

$$\frac{DC}{OB} = Sh\,\varphi, \qquad \textit{seno ídem....... de } \varphi;$$

$$\frac{AD}{OA} = Svh\,\varphi, \qquad \textit{senoverso ídem... de } \varphi;$$

$$\frac{OE}{OC} = Sch\,\varphi, \qquad \textit{secante hiperbólica de } \varphi;$$

$$\frac{AE}{OB} = Th\,\varphi, \qquad \textit{tangente ídem.... de } \varphi.$$

Por consiguiente:

$$OD = Ch\,\varphi . i;$$

$$AD = Svh\,\varphi . i;$$

$$OE = Sch\,\varphi . \rho;$$

$$DC = Sh\,\varphi . j;$$

$$AE = Th\,\varphi . j.$$

En el triángulo menor,

$$OE = OA + AE; \qquad Sch\,\varphi . \rho = i + Th\,\varphi . j;$$

en el mayor,

$$OC = OD + DC; \qquad \rho = Ch\,\varphi . i + Sh\,\varphi . j.$$

Eliminando ρ:

$$Sch\,\varphi . Ch\,\varphi . i + Sch\,\varphi . Sh\,\varphi . j = i + Th\,\varphi . j;$$

y, por consiguiente:

$$\left.\begin{array}{l} Sch\,\varphi.Ch\,\varphi = 1 \\ Sch\,\varphi.Sh\,\varphi = Th\,\varphi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Ch\,\varphi = Sch^{-1}\varphi\,; \quad Sch\,\varphi = Ch^{-1}\varphi\,. \\ Th\,\varphi = \dfrac{Sh\,\varphi}{Ch\,\varphi} = Cth^{-1}\varphi. \end{array}$$

Además:

$$OD - OA = AD\,; \qquad Svh\,\varphi = Ch\,\varphi - 1.$$

Veamos á qué escalar puede corresponder el que, por analogía con el del círculo, hemos denominado *cotangente hiperbólica* $\left(Ct\,\varphi = \dfrac{Ch\,\varphi}{Sh\,\varphi}\right)$: si llamamos b' á la proyección del punto b sobre la dirección i, por la definición de los escalares *seno* y *coseno*, es evidente que

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{OA}{i} = \dfrac{OE}{v}\cos\theta\,; \\ \dfrac{OD}{i} = \dfrac{OC}{v}\cos\theta\,; \\ \dfrac{Ob'}{i} = \dfrac{Ob}{v}\cos\theta\,. \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{AE}{j} = \dfrac{OE}{v}\,\text{sen}\,\theta\,; \\ \dfrac{DC}{j} = \dfrac{OC}{v}\,\text{sen}\,\theta\,; \\ \dfrac{b'b = OB = j}{j} = \dfrac{Ob}{v}\,\text{sen}\,\theta\,. \end{array}\right.$$

Eliminadas las líneas trigonométricas, dan:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OC} = \frac{Ob'}{Ob}\,;$$

$$\frac{AE}{OE} = \frac{DC}{OC} = \frac{j}{Ob}\,.$$

Es decir, por definición de las hiperbólicas:

$$\frac{i}{Sch\,\varphi.\rho} = \frac{Ch\,\varphi.i}{\rho} = \frac{Ob'}{Ob}\,;$$

$$\frac{Th\,\varphi j}{Sch\,\varphi.\rho} = \frac{Sh\,\varphi.j}{\rho} = \frac{j}{Ob}\,.$$

De estas últimas

$$\frac{Ob}{\rho} = \frac{1}{Sh\,\varphi};$$

escalar que se denomina $Csh\,\varphi$ (*cosecante hiperbólica*).

De las primeras

$$Ob' = \frac{Ch\,\varphi.i}{\rho}\,Ob = \frac{Ch\,\varphi.i}{\rho} \cdot \frac{\rho}{Sh\,\varphi} = \frac{Ch\,\varphi}{Sh\,\varphi}\,.i.$$

Es decir, que

$$\frac{Ch\,\varphi}{Sh\,\varphi} = Cth\,\varphi = \frac{Ob'}{i} = \frac{Bb}{i}\ (= \cot\theta).$$

Busquemos ahora la significación de la variable φ y su dependencia de las líneas Sh y Ch. La ecuación (en escalares) del círculo trigonométrico, si se llama x al coseno é y al seno, es

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

La análoga de la hipérbola en cuestión:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = k\sqrt{1 - x^2}.$$

Ambas funciones de x no difieren más que en el factor k (versor cuadrante). Al analizarlas infinitesimalmente, esta sola diferencia debe aparecer en los resultados, que se podían escribir *a priori* haciendo en las fórmulas circulares $k = +1$.

Se demostró en el número **12** que, no teniendo que medirse las variaciones infinitésimas de segundo orden (por ser las unidades adoptadas de primero) la cuerda del arco infinitésimo (que se nota ds) se confunde numéricamente con este arco, es decir:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\,.\,dx = \sqrt{1 + (D_x y)^2}\,.\,dx.$$

Por la constancia del radio, se tiene en el círculo

$$ds = (R = L = 1) . d\varphi ; \qquad d\varphi = \frac{ds}{R = 1} .$$

La cantidad análoga de la hipérbola equilátera es

$$d\varphi = \frac{ds}{R = \sqrt{x^2 + y^2}} .$$

De su ecuación ($x^2 - y^2 = 1$), diferenciándola:

$$2xdx - 2ydy = o ; \qquad \frac{dy}{dx} = D_x y = \frac{x}{y} .$$

luego:

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = dx \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = R \frac{dx}{y} = R \frac{dy}{x} ;$$

ó bien, por la ecuación de la hipérbola:

$$ds = R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = R \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

Por consiguiente:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

La variable φ recibe el nombre de *argumento*. Como $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, habrá de ser x una cierta función de φ,

$$x = f(\varphi) .$$

Empezamos á contar las $\varphi\varphi$ (como en el círculo trigonométrico los ángulos) á partir del eje de las XX, ó sea desde

el vértice de la hipérbola, á que corresponde el menor valor de R,

$$R = \| 1 .$$

Por la forma

$$d\varphi = \frac{ds}{\| R},$$

es evidente que

$$\begin{cases} d\varphi < \dfrac{ds}{1} \\ d\varphi > \dfrac{ds}{\| R_1}, \end{cases}$$

siendo R_1 un valor determinado correspondiente á un punto de la hipérbola más separado del vértice. Puesto que $\overset{\Delta\phi}{\underset{0}{}}\varphi = \varphi$ (véase en la Lección 1.ª la significación de las características d é $\int$),

$$\varphi = \int_A^C d\varphi < \left(\int_A^C ds = s\right)$$

$$\varphi > \left(\frac{1}{\| R_1}\int_A^C ds = \frac{s}{\| R_1}\right)$$

y, como R_1 es finito y en el punto A ($s = 0$)

$$+R = x = +1, \quad y = 0: \quad \varphi = 0,$$

tendremos para el desarrollo de aquella función $f(\varphi)$, por la fórmula de Mac-Laurin:

$$x_0 = f(0) = 1 ;$$

$$D_\phi(x) = \frac{dx}{d\varphi} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \qquad f'(\varphi = 0, \quad x = 1) = 0 ;$$

$$D_{\phi^2}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} . 2x\frac{dx}{d\varphi} = x, \qquad f''(0) = 1 ;$$

$$D_{\phi^3}(x) = 1 . \frac{dx}{d\varphi} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \qquad f'''(0) = 0 ;$$

....

que dan la serie

$$x = f(\varphi) = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

Al propio tiempo, $d\varphi = dy\,(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$; y para el desarrollo de la $y = F(\varphi)$ se tiene:

$$F(0) = 0;$$

$$D_\varphi(y) = \frac{dy}{d\varphi} = (y^2+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad F'(0) = 1;$$

$$D_{\varphi^2}(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} . 2y\frac{dy}{d\varphi} = y, \qquad F''(0) = 0;$$

$$D_{\varphi^3}(y) = 1 . \frac{dy}{d\varphi} = (y^2+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad F'''(0) = 1.$$

....

Por lo tanto:

$$y = F(\varphi) = \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

Desarrollando análogamente (*) las exponenciales e^φ y $e^{-\varphi}$:

$$e^\varphi = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \dots,$$

$$e^{-\varphi} = 1 - \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots;$$

y de ellas, por suma y resta:

(*) $\begin{cases} D_{\varphi^n}\, e^\varphi = e^\varphi; & D_{\varphi^n}\, e^\varphi\big]_{\varphi=0} = 1; \\ D_{\varphi^n}\, e^{-\varphi} = (-1)^n e^{-\varphi}; & D_{\varphi^n}\, e^{-\varphi}\big]_{\varphi=0} = (-1)^n. \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}=1+\dfrac{\varphi^2}{2\,!}+\dfrac{\varphi^4}{4\,!}+\dots=x\,; \\[2ex] \dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}=\dfrac{\varphi}{1}+\dfrac{\varphi^3}{3\,!}+\dfrac{\varphi^5}{5\,!}+\dots=y\,. \end{array} \left|\begin{array}{l} e^{\varphi}=x+y \\[2ex] e^{-\varphi}=x-y \end{array}\right\} x^2-y^2=1.$$

Los valores de las líneas hiperbólicas, en funciones del argumento, habrán de ser según esto:

I.

$$Ch\,\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right).$$

II.

$$Sh\,\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right).$$

III.

$$Th\,\varphi=\frac{e^{2\varphi}-1}{e^{2\varphi}+1}.$$

IV.

$$Ct\,\varphi=\frac{e^{2\varphi}+1}{e^{2\varphi}-1}.$$

V.

$$Sch\,\varphi=\frac{2e^{\varphi}}{e^{2\varphi}+1}.$$

VI.

$$Csh\,\varphi=\frac{2e^{\varphi}}{e^{2\varphi}-1}.$$

VII.

$$Svh\,\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right)-1=2Sh^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

VIII.

$$Cvh\,\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right)+1=2Ch^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

59. *Derivación de las líneas hiperbólicas.*—Aplicando las reglas:

I.

$$D_\varphi (Ch\,\varphi) = \frac{1}{2}\left(D_\varphi e^\varphi + D_\varphi e^{-\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^\varphi - e^{-\varphi}\right) = Sh\,\varphi\,.$$

II.

$$D_\varphi (Sh\,\varphi) = \frac{1}{2}\left(D_\varphi e^\varphi - D_\varphi e^{-\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^\varphi + e^{-\varphi}\right) = Ch\,\varphi\,.$$

III.

$$D_\varphi (Th\,\varphi) = D_\varphi \frac{Sh\,\varphi}{Ch\,\varphi} = \frac{Ch^2\,\varphi - Sh^2\,\varphi}{Ch^2\,\varphi} = \frac{1}{Ch^2\,\varphi} = Sch^2\,\varphi\,.$$

IV.

$$D_\varphi (Cth\,\varphi) = D_\varphi \frac{Ch\,\varphi}{Sh\,\varphi} = \frac{Sh^2\,\varphi - Ch^2\,\varphi}{Sh^2\,\varphi} = -\frac{1}{Sh^2\,\varphi} = -Csh^2\,\varphi\,.$$

V.

$$D_\varphi (Sch\,\varphi) = D_\varphi \frac{1}{Ch\,\varphi} = \frac{-Sh\,\varphi}{Ch^2\,\varphi} = -Th\,\varphi . Sch\,\varphi\,.$$

VI.

$$D_\varphi (Csh\,\varphi) = D_\varphi \frac{1}{Sh\,\varphi} = \frac{-Ch\,\varphi}{Sh^2\,\varphi} = -Cth\,\varphi . Csh\,\varphi\,.$$

VII.

$$D_\varphi (Svh\,\varphi) = D_\varphi Ch\,\varphi = Sh\,\varphi.$$

VIII.

$$D_\varphi (Cvh\,\varphi) = D_\varphi Ch\,\varphi = Sh\,\varphi.$$

60. Para relacionar el argumento φ con el ángulo θ que

con el eje de las XX forma el radio vector ($\rho = Rv$): se ve en la figura que

$$R \cos \theta = Ch\, \varphi ;$$

$$R \operatorname{sen} \theta = Sh\, \varphi ;$$

Por consiguiente, dividiendo la segunda por la primera:

$$\operatorname{tang} \theta = Th\, \varphi = \frac{e^{2\varphi} - 1}{e^{2\varphi} + 1}.$$

Despejando $e^{2\varphi}$,

$$e^{2\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tang} \theta}{1 - \operatorname{tang} \theta} = \frac{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta} = (^*) \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right).$$

De la que

$$\varphi = \frac{1}{2} \log_e \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right);$$

$$\theta = \operatorname{arctang} e^{2\varphi} - \frac{\pi}{4}.$$

Como θ no puede variar más que entre los valores extremos, correspondientes á las asíntotas $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(+\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ variará entre cero y *más* infinito; φ será un *escalar* variable de *menos* á *más* infinito. Los escalares *ángulos* del círculo, *argumentos* de la hipérbola equilátera, tienen toda la latitud posible. El escalar Sh, lo mismo. En el Ch hay solución de continuidad desde *menos uno* á *más uno*, rellenada por el *coseno* ó el *seno*.

(*) $= \dfrac{(2)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta + \operatorname{sen} \theta\, (2)^{-\frac{1}{2}}}{\cos \theta\, (2)^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{sen} \theta\, (2)^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}$

Un cuaternio cualquiera puede escribirse

$$q = \mathrm{T}[\mathrm{U} = e^{\theta k} = (e^{\theta})^{k}] = \mathrm{T}(\mathrm{C}h\,\theta + \mathrm{S}h\,\theta)^{k}.$$

Un *versor*, puede siempre considerarse como la suma de aquellos dos escalares hiperbólicos elevada á la potencia *vectorial* unidad (k), perpendicular al plano del cuaternio. O bien:

$$\mathrm{U} = (\mathrm{C}h\,1 + \mathrm{S}h\,1)^{\theta k}.$$

61. Para determinar las líneas hiperbólicas de argumentos sumas y múltiplos; podemos, por ejemplo, escribir

$$4\mathrm{C}h(a+b) = 2[e^{a+b} + e^{-(a+b)}] = e^{a}.e^{b} + e^{-a}.e^{-b} + e^{a}.e^{b} + e^{-a}.e^{-b}$$

y añadiendo

$$e^{a}.e^{-b} - e^{-b}.e^{a} - e^{b}.e^{-a} + e^{-a}.e^{b} = 0,$$

$$4\mathrm{C}h(a+b) = e^{a}(e^{b} + e^{-b}) - e^{-b}(e^{a} - e^{-a}) + e^{b}(e^{a} - e^{-a}) + e^{-a}(e^{b} + e^{-b}) =$$

$$= (e^{a} + e^{-a})(e^{b} + e^{-b}) + (e^{a} - e^{-a})(e^{b} - e^{-b}) =$$

$$= 4[\mathrm{C}h\,a.\mathrm{C}h\,b + \mathrm{S}h\,a.\mathrm{S}h\,b].$$

Luego

$$\mathrm{C}h(a+b) = \mathrm{C}h\,a.\mathrm{C}h\,b + \mathrm{S}h\,a.\mathrm{S}h\,b.$$

Análogamente, hallaremos

$$\mathrm{S}h(a+b) = \mathrm{S}h\,a.\mathrm{C}h\,b + \mathrm{S}h\,b.\mathrm{C}h\,a.$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{C}h\,(2a) = \mathrm{C}h^{2}\,a + \mathrm{S}h^{2}\,a;$$

$$\mathrm{S}h\,(2a) = 2\,\mathrm{S}h\,a.\mathrm{C}h\,a.$$

Confrontadas con las circulares del número **57**, podemos desde luego escribir:

$$Ch(a+b+c)=Ch\,a.Ch\,b.Ch\,c+Sh\,a.Sh\,b.Ch\,c+$$
$$+Sh\,b.Sh\,c.Ch\,a+Sh\,c.Sh\,a.Ch\,b\,;$$

$$Sh(a+b+c)=Sh\,a.Sh\,b.Sh\,c+Sh\,a.Ch\,b.Ch\,c+$$
$$+Sh\,b.Ch\,c.Ch\,a+Sh\,c.Ch\,a.Ch\,b;$$

y, por consiguiente,

$$Ch(3a)=Ch^3\,a+3Sh^2\,a.Ch\,a=Ch\,a.(Ch^2\,a+3Sh^2\,a)\,;$$
$$Sh(3a)=Sh^3\,a+3Sh\,a.Ch^2\,a=Sh\,a.(Sh^2\,a+3Ch^2\,a).$$

Con argumentos negativos, observaremos que, como en el círculo,

$$Ch(-a)=\frac{1}{2}\left(e^{-a}+e^{-(-a)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{a}+e^{-a}\right)=Ch(+a)\,,$$

$$Sh(-a)=\frac{1}{2}\left(e^{-a}-e^{-(-a)}\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{a}-e^{-a}\right)=-Sh(+a)\,;$$

el signo del argumento no transciende al Ch, pero sí á todas las potencias impares del Sh.

Siguiendo el mismo procedimiento que en las circulares, llegaremos á idénticas fórmulas para las tres primeras diferencias, convertidas en productos. En la tercera se llega á

$$+2\,Sh\,\frac{p+q}{2}\,.\,Sh\,\frac{p-q}{2}\,,$$

en vez de

$$2(h^2=-1)\text{ sen }\frac{p+q}{2}\,.\text{ sen }\frac{p-q}{2}\,.$$

La cuarta es

$$Ch^2\,\frac{p+q}{2}-Ch^2\,\frac{p-q}{2}=Sh^2\,\frac{p+q}{2}-Sh^2\,\frac{p-q}{2}=Sh\,p.Sh\,q;$$

$$Ch^2a-Ch^2\,b=Sh^2\,a-Sh^2\,b=Sh(a+b).Sh(a-b).$$

LECCIÓN 7.ª

FUNCIONES INVERSAS—LOGARÍTMICAS

EXPONENCIAL DE BASE CUALQUIERA

62. Denomínanse *inversas* dos características funcionales cuando superpuestas se eliminan. Es decir, Φ y Ψ son inversas una de otra si

$$\Phi(\Psi u) = u = \Psi(\Phi u).$$

Llamando z á la variable $\Phi(u)$, tendremos por la antedicha definición, las dos funciones recíprocamente inversas

$$\left.\begin{aligned} u &= \Psi(z), \\ z &= \Phi(u). \end{aligned}\right\} u = \Psi(z = \Phi u) \qquad (\mathbf{1}).$$

Derivando esta (**1**) con relación á u, como su segundo miembro es una función de función,

$$1 = D_z(\Psi).D_u(\Phi).$$

Es decir, que:

Las derivadas de dos funciones inversas, con relación á sus variables inmediatas, *son recíprocas.*

63. *Derivación de las circulares inversas.*—La inversa de la circular

$$u = \text{lín}\ \varphi \qquad (\textit{línea de } \varphi),$$

habrá de ser, por definición, la

$$\varphi = \text{arclín}\ u \qquad (\textit{arco cuya línea es } u).$$

Aplicando la regla anterior:

I.

$$D_u(\varphi = \text{arcsen}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \text{sen}\ \varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

II.

$$D_u(\varphi = \text{arccos}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \cos\varphi)} = \frac{-1}{\text{sen}\ \varphi} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

III.

$$D_u(\varphi = \text{arcsec}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \sec\varphi)} = \frac{\cos^2\varphi}{\text{sen}\ \varphi} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

IV.

$$D_u(\varphi = \text{arcsenver}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \text{senver}\ \varphi)} = \frac{1}{\text{sen}\ \varphi} = \frac{1}{\sqrt{u(2-u)}}$$

V.

$$D_u(\varphi = \text{arctang}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \text{tang}\ \varphi)} = \cos^2\varphi = \frac{1}{1+u^2}$$

VI.

$$D_u(\varphi = \text{arccosec}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \text{cosec}\ \varphi)} = -\frac{\text{sen}^2\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

VII.

$$D_u(\varphi = \text{arccosver}\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \text{cosver}\ \varphi)} = \frac{-1}{\cos\varphi} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{u(2-u)}}.$$

VIII.

$$D_u(\varphi = \text{arccot } u) = \frac{1}{D_\varphi(u = \cot \varphi)} = -\,\text{sen}^2\,\varphi = \frac{-1}{1+u^2}.$$

Pudiéramos habernos ahorrado el cálculo de estas tres últimas, observando que sus arcos (φ') estarán ligados con los (φ) respectivos de las tres anteriores, así como el de la segunda con el de la primera (por complementarios) con la igualdad

$$\varphi' + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

de la que

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

y derivando:

$$D_u\varphi' = -\,D_u\varphi.$$

64. *Derivadas de las hiperbólicas inversas.*—La inversa de la

es $\left.\begin{array}{l} u = \text{Lin}\,h\,\varphi, \\ \varphi = \text{Arg Lin}\,u. \end{array}\right\}$ Además: $Ch^2\,\varphi - Sh^2\,\varphi = 1$.

I.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Ch\;u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Ch\,\varphi)} = \frac{1}{Sh\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}.$$

II.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Sh\;u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Sh\;\varphi)} = \frac{1}{Ch\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}.$$

III.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Th\;u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Th\;\varphi)} = Ch^2\,\varphi = \frac{1}{1-u^2}.$$

IV.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Cth\;u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Cth\;\varphi)} =$$

$$-\,Sh^2\,\varphi = \frac{-1}{u^2-1} = \frac{1}{1-u^2}.$$

V.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Sch\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Sch\ \varphi)} = -\frac{Ch^2\varphi}{Sh\,\varphi} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}.$$

VI.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Csh\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Csh\ \varphi)} = -\frac{Sh^2\varphi}{Ch\,\varphi} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2+1}}.$$

VII.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Svh\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Svh\ \varphi)} = \frac{1}{Sh\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(u+2)u}}.$$

VIII.

$$D_u(\varphi = \text{Arg}\,Cvh\ u) = \frac{1}{D_\varphi(u = Cvh\ \varphi)} = \frac{1}{Sh\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(u-2)u}}.$$

Logarítmicas.

65. La función inversa de la exponencial

$$x = e^u$$

se escribe

$$u = \log_e x,$$

y se lee, *logaritmo* de base e de x; y también logaritmo *neperiano* (de Sir J. Neper) ó *hiperbólicos* (por lo que en las cuadraturas se verá). Por consiguiente,

$$D_x(u = \log_e x) = \frac{1}{D_u(x = e^u)} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x};$$

se la denomina *derivada logarítmica* de x; y á la

$$d\,(u = \log_e x) = \frac{dx}{x},$$

diferencial logarítmica.

66. Si tenemos un producto de diversas variables

$$\Pi = u.v.w.x ... = e^{\log_e u}.e^{\log_e v}.e^{\log_e w}.e^{\log_e x} ...$$

$$= e^{\log_e u + \log_e v + \log_e w + \log_e x} ...,$$

tomamos los logaritmos neperianos de ambos miembros,

$$\log_e \Pi = \log_e u + \log_e v + \log_e w + \log_e x + ...,$$

y diferenciamos:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \frac{dx}{x} + ...$$

La diferencial logarítmica de un producto es igual á la suma de las diferenciales logarítmicas de sus factores. Si hubiere algún divisor, se escribirá como multiplicador elevado á *menos uno.*

Esta regla es de muy útil aplicación.

Si las variables son *números ó escalares,* no hay que ocuparse del orden de colocación de los sumandos. Si *vectores,* todos paralelos á un plano, tampoco; pero si son vectores que no reunan esta condición, como hemos visto que en el polígono esférico de los versores es indispensable conservar el orden de los factores exponenciales, cuyos exponentes al pasar á los logaritmos, dan los sumandos, síguese necesariamente que al alterar el orden de colocación de los sumandos (en el caso éste, de logaritmos de *vectores no coplanares)* alteraríamos el valor de la suma versorial.

Si las variables $u, v, w, ...$ etc., fuesen todas funciones de otra (t), tomando como unidad á dt:

$$\frac{d\Pi}{dt} = D_t\Pi = \frac{D_t u}{u} + \frac{D_t v}{v} + \frac{D_t w}{w} + ...$$

67. Como ejemplo de *diferenciación logarítmica,* vamos

por su medio á determinar la del vector ρ. Considerémosle en su valor corriente ó variable ($\rho = nv$) y en otro determinado ó constante ($\rho_0 = n_0 v_0$); versor cuadrante (*fijo* con relación al plano de ambos) w; ángulo de ρ con ρ_0 igual á φ.

Tendremos el cuaternio cociente:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} e^{\phi w}; \qquad \rho . \rho_0^{-1} = n . n_0^{-1} . e^{\phi w};$$

tomando los logaritmos neperianos de ambos miembros,

$$\log_e \rho - \log_e \rho_0 = \log_e n - \log'_e n_0 + \varphi w;$$

y diferenciando, por la invariabilidad (relativa) de ρ_0, n_0 y w,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dn}{n} + d\varphi\, w;$$

que, multiplicando por $\rho = nv$, queda

$$d\rho = dn.v + nd\varphi(w.v = -u).$$

Expresión idéntica á la hallada directamente en el número **43**, como era de esperar.

68. Para diferenciar logaritmos de los *vulgares* (de base 10); si $u = \log_{10} x$, la exponencial inversa será

$$x = 10^u = (e^{\log_e 10})^u = e^{\log_e 10 . u};$$

y, por lo tanto:

$$\log_e x = \log_e 10 . u; \qquad u = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$D_x(\log_{10} x) = \frac{1}{\log_e 10} . \frac{1}{x}; \qquad d(\log_{10} x) = \frac{1}{\log_e 10} \frac{dx}{x}.$$

69. En la exponencial de base cualquiera, pero constante,

$$y = a^x; \qquad \log_e y = \log_e a . x;$$

la derivada logarítmica:

$$\frac{D_x y}{y} = \log_e a; \qquad D_x(a^x) = \log_e a \ a^x.$$

Por consiguiente,

$$d(a^x) = \log_e a . a^x dx$$

Si la base es variable: $y = u^x$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} . x + \log_e u . dx; \qquad d(u^x) = \frac{du}{u} . x . u^x + \log_e u . dx . u^x,$$

que si se trata de variables *escalares* (de orden de colocación indiferente) se reduce á

$$d(u^x) = xu^{x-1} du + \log_e u . u^x dx;$$

y, si la base y el exponente son una misma variable, á

$$d(x^x) = x^x(1 + \log_e x)dx.$$

70. *Forma logarítmica de las hiperbólicas y circulares inversas.*—De la I de las hiperbólicas ($\varphi = \text{Arg } Ch\ u$):

$$u = Ch\ \varphi = \frac{e^{2\varphi} + 1}{2e^{\varphi}}.$$

Quitando el denominador, ordenando, etc.:

$$e^{2\varphi} - 2e^{\varphi}u + 1 = 0:$$

ecuación de segundo grado en (e^{φ}) que resuelta, y dejando al símbolo funcional $\sqrt{\ } = [\ ]^{\frac{1}{2}}$ toda su extensión, nos da

$$e^{\varphi} = u + \sqrt{u^2 - 1};$$

y, tomando logaritmos neperianos: $\varphi =$

I.

$$\text{Arg}\ \text{C}h\ u = \log_e\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right). \qquad (u > 1).$$

Análogamente hallaremos:

II.

$$\text{Arg}\ \text{S}h\ u = \log_e\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right).$$

III.

$$\text{Arg}\ \text{T}h\ u = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+u}{1-u}. \qquad (u < 1).$$

IV.

$$\text{Arg}\ \text{C}th\ u = \frac{1}{2}\log_e\frac{u+1}{u-1}. \qquad (u > 1).$$

V.

$$\text{Arg}\ \text{S}ch\ u = \log_e\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}. \qquad (u < 1).$$

VI.

$$\text{Arg}\ \text{C}sh\ u = \log_e\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}.$$

VII.

$$\text{Arg}\ \text{S}vh\ u = 2\log_e\left(\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2}+1}\right).$$

VIII.

$$\text{Arg}\ \text{C}vh\ u = 2\log_e\left(\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2}-1}\right). \qquad \left(\frac{u}{2} > 1\right).$$

En *las circulares* se obtiene, del mismo modo:

I.

$$\text{arc}\cos u = \frac{1}{k}\log_e\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right).$$

II.

$$\text{arc sen}\, u = \frac{1}{k} \log_e \left(uk + \sqrt{1-u^2}\right).$$

III.

$$\text{arc tang}\, u = \frac{1}{2k} \log_e \frac{k-u}{k+u}. \qquad (\theta_3)$$

IV.

$$\text{arc cot}\, u = \frac{1}{2k} \log_e \frac{u+k}{u-k}.$$

V.

$$\text{arc sec}\, u = \frac{1}{k} \log_e \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

VI.

$$\text{arc cosec}\, u = \frac{1}{k} \log_e \frac{k+\sqrt{u^2-1}}{u}.$$

VII.

$$\text{arc senver}\, u = \frac{2}{k} \log_e \left[k\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{1-\frac{u}{2}}\right].$$

VIII.

$$\text{arc cosver}\, u = \frac{2}{k} \log_e \left[\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2}-1}\right].$$

71. Si nos fijamos en la θ_3, por ejemplo, y hacemos en ella

$$\theta_3 = \frac{\pi}{4}; \qquad u = \text{tang}\, \frac{\pi}{4} = 1,$$

nos queda

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2k} \log_e \left(\frac{1+k}{1-k} = k\right);$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log_e k}{k} = \log_e k^{\frac{1}{k}} = \log_e k^{-k};$$

ó sea

$$\frac{\pi}{2} = \log_e \frac{1}{k^k} = -\log_e k^k.$$

Por consiguiente,

(*) $$k^k = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}} = 0{,}288066\ldots; \qquad k^k \,.\, e^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Elevando á las potencias $(+k)$ y $(-k)$:

$$(k^{k^2=-1} = -k)e^{\frac{\pi}{2}k} = 1^k;$$

$$(k^{-k^2} = k)e^{-\frac{\pi}{2}k} = 1^{-k};$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}k}}{k} = 1^k \\ \dfrac{-e^{-\frac{\pi}{2}k}}{k} = 1^{-k} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1 = \dfrac{1^k + 1^{-k}}{2}; \\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 = \dfrac{1^k - 1^{-k}}{2}k; \end{array}\right\} 1^k = 1^{-k} = 1.$$

72. Si queremos derivar estas inversas en su forma logarítmica. De las hiperbólicas:

I.

$$D_u(\text{Arg } Ch\, u) = \frac{1 + (u^2-1)^{-\frac{1}{2}}u}{u + \sqrt{u^2-1}} = (u^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}.$$

II.

$$D_u(\text{Arg } Sh\, u) = \frac{1 + (u^2+1)^{-\frac{1}{2}}u}{u + \sqrt{u^2+1}} = (u^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}.$$

III.

$$D_u(\text{Arg } Th\, u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+u} - \frac{-1}{1-u}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}.$$

IV.

$$D_u(\text{Arg } Cth\, u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right] = \frac{-1}{u^2-1} = \frac{+1}{1-u^2}.$$

(*) Para los planos perpendiculares á la unidad vectora k, $k = \sqrt{-1}$: $k^k = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ es ese *número*, según ya lo demostré Euler. No puede tomarse como *cantidad dirigida*.

V.

$$D_u(\text{Arg Sch } u) = \frac{-(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} u}{1+\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{u} = -\frac{\left(1-\sqrt{1-u^2}\right) u}{\sqrt{1-u^2} . u^2}$$

$$- \frac{1}{u} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} .$$

VI.

$$D_u(\text{Arg Csh } u) = \frac{(1+u^2)^{-\frac{1}{2}} u}{1+\sqrt{1+u^2}} - \frac{1}{u} = \frac{\left(1-\sqrt{1+u^2}\right)u}{\sqrt{1+u^2}(-u^2)}$$

$$- \frac{1}{u} = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}} .$$

VII.

$$D_u(\text{Arg Svh } u) = 2 \; \frac{D_u\left(\sqrt{u}+\sqrt{u+2}\right)}{\sqrt{u}+\sqrt{u+2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u+2}}}{\sqrt{u}+\sqrt{u+2}} = \frac{1}{\sqrt{(u+2)\, u}} .$$

VIII.

$$D_u(\text{Arg Cvh } u) = 2 \; \frac{D_u\left(\sqrt{u}+\sqrt{u-2}\right)}{\sqrt{u}+\sqrt{u-2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u-2}}}{\sqrt{u}+\sqrt{u-2}} = \frac{1}{\sqrt{(u-2)u}} .$$

Análogamente pueden derivarse las circulares.

73. *Derivadas sucesivas de* e^{ax}, sen x, cos x, *Sh* x y *Ch* x. Como

$$D_x(e^{ax}) = D_{(ax)}(e^{ax}) \cdot D_x(ax) = e^{ax} . a$$

$$D_{x^2}(e^{ax}) = a^2 e^{ax}$$

....

$$D_{x^n}(e^{ax}) = (a)^n e^{ax} ;$$

y, por consiguiente,

$$D_{x^n}(e^{-x}) = (-1)^n e^{-x} .$$

Además, por la propiedad de la exponencial e^x, de no alterarse con la derivación con respecto á x:

$$D_{x^n}(e^{+x}) = e^x .$$

Para las derivadas n.as de sen x y cos x, tenemos, siendo k el versor cuadrante,

$$e^{kx} = \cos x + k \operatorname{sen} x ,$$

$$e^{-kx} = \cos x - k \operatorname{sen} x ;$$

y derivando n veces,

$$(k)^n e^{kx} = D_{x^n} \cos x + k D_{x^n} \operatorname{sen} x ,$$

$$(-k)^n . e^{-kx} = D_{x^n} \cos x - k D_{x^n} \operatorname{sen} x ;$$

de las que, por ser $-k = \frac{1}{k} = (k)^{-1}$,

$$D_{x^n} \cos x = \frac{1}{2}(k^n e^{kx} + k^{-n} e^{-kx}) ,$$

$$D_{x^n} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2k}(k^n e^{kx} - k^{-n} e^{-kx}) ;$$

y como

$$e^{\pm \frac{\pi}{2} k} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + k \operatorname{sen}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm k ;$$

$$(\pm k)^n = e^{\pm n \frac{\pi}{2} k} :$$

$$D_{x^n}\cos x = \frac{1}{2}\left[e^{\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)k} + e^{-\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)k}\right] = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$D_{x^n}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2k}\left[e^{\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)k} - e^{-\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)k}\right] = \operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Las análogas hiperbólicas son aún más sencillas:

$$D_{x^n}\left(Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}\begin{cases} n \text{ par}\ldots = Ch\,x\,; \\ n \text{ impar} = Sh\,x\,; \end{cases}$$

$$D_{x^n}\left(Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2}\begin{cases} n \text{ par}\ldots = Sh\,x\,; \\ n \text{ impar} = Ch\,x \end{cases}$$

LECCIÓN 8.ª

DESARROLLOS IMPORTANTES—EL NÚMERO π.

LOGARITMOS—INDETERMINACIÓN APARENTE

74. Para el desarrollo en serie de Mac-Laurin de *sen x* y *cos x*, tenemos:

$$D_{x^n} \operatorname{sen} x \Big]_{x=0} = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right);$$

$$D_{x^n} \cos x \Big]_{x=0} = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right);$$

y, por consiguiente, aquella serie toma las formas,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots + \frac{1}{n!} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2} + \theta x\right) x^n .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} \cos\left(n \frac{\pi}{2} + \theta x\right) x^n .$$

Si se trata de un arco infinitésimo, dx:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} dx &= dx - \frac{dx^3}{3\,!} + \ldots; \\ \cos dx &= 1 - \frac{dx^2}{2\,!} + \ldots; \end{aligned}\right\} \operatorname{tang} dx = \frac{\operatorname{sen} dx}{\cos dx} = dx + \frac{1}{3}\, dx^3 - \ldots;$$

vemos que el exceso del arco sobre el seno es un infinitésimo de tercer orden; el *senoverso*, ó sea el exceso de la unidad sobre el *coseno*, de segundo. El de la *tangente* sobre el arco, de tercer orden.

75. Para desarrollar $Sh\,x$ y $Ch\,x$, tenemos

$$D_x Sh\,x = Ch\,x\,;$$

$$D_x Ch\,x = Sh\,x\,;$$

y

$$Sh\,(0) = 0\,;$$

$$Ch\,(0) = 1\,;$$

que dan las series:

$$Sh\,x = x + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \frac{x^7}{7\,!} + \dots + \frac{Ch\,(\theta x)}{(2n+1)\,!}\,x^{2n+1}\,;$$

$$Ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^6}{6\,!} + \dots + \frac{Ch\,(\theta x)}{2n\,!}\,x^{2n}\,;$$

siendo n el número de términos que se tomen. Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{l} Sh\,dx = dx + \dfrac{dx^3}{3\,!} + \dots \\ Ch\,dx = 1 + \dfrac{dx^2}{2} + \dots \end{array}\right\} \; Th\,dx = dx - \frac{1}{3}\,dx^3 + \dots$$

Las diferencias son del mismo orden que en las circulares, con la variante del signo.

76. *Desarrollos de arctang x y de Arg Th x.*—Sabemos, por lo expuesto en el número **70**, que

$$z = f(x) = \text{arctang}\,x = \frac{1}{2k}\left[\log_e (k - x) - \log_e (k + x)\right]$$

Por lo tanto:

$$2k\,D_{x^n}\,z = D_{x^n} \log_e (k - x) - D_{x^n} \log_e (k + x)\,.$$

Ahora bien:

$$D_{x^n} \log_e (k - x) = D_{x^{n-1}} [-(k - x)^{-1}] = -(n-1)!\,(k-x)^{-n};$$

$$D_{x^n} \log_e (k + x) = D_{x^{n-1}} [+(k + x)^{-1}] = -(-1)^n (n-1)!\,(k+x)^{-n}.$$

Luego:

$$D_{x_n} z = f^{(n)}(x) = (n-1)!\,\frac{(-1)^n (k+x)^{-n} - (k-x)^{-n}}{2k},$$

y, por ende, si n es *par*,

$$f^{(n)}(0) = 0;$$

si n es *impar*,

$$f^{(n)}(0) = -(k)^{-n-1}(n-1)! = -(-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!.$$

La serie de Mac-Laurin, con estos valores de las $f^{(n)}(0)$ es:

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Análogamente hallaríamos:

$$\operatorname{Arg} Th\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

77. *Determinación de* π.—La manera más cómoda de precisar este número inconmensurable, relación de la circunferencia al diámetro, estriba en el desarrollo

$$x = \operatorname{arccot} c = \operatorname{arctang} c^{-1} = c^{-1} - \frac{c^{-3}}{3} + \frac{c^{-5}}{5} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{c^{-2n+1}}{2n-1} + R_n \qquad \textbf{(1)};$$

valiendo el *resto,* tras n términos,

$$R = (-1)^n \frac{c^{-(2n+1)}}{2n+1}\left[1 - \frac{(2n+1)c^{-n}}{(2n+3)(2n+5)}[2n+5 - (2n+3)c^{-2}] - \dots\right];$$

que, si $c <\!\!> 1$, puede escribirse, llamando Δ_n á un *número* comprendido entre cero y la unidad, y creciente con el n:

$$R_n = (-1)^n \frac{1 - \Delta_n}{(2n+1)c^{2n+1}}.$$

Por consiguiente:

$$(-1)^n R_n < \frac{1}{(2n+1)c^{2n+1}}.$$

Queda reducido el problema á proporcionarnos un arco cuya cotangente sea lo suficientemente grande. Tenemos, por el número **57** de las funciones circulares,

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \frac{\text{tang}\,a \pm \text{tang}\,b}{1 \mp \text{tang}\,a.\text{tang}\,b};$$

y, por lo tanto,

$$\cot\,(a \pm b) = \frac{\cot a.\cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a} \qquad \textbf{(2)}.$$

Si llamamos, para simplificar la notación, así como á la de φ, c, á la de $n\varphi$, C_n:

$$\cot \varphi = c,$$
$$\cot n\varphi = C_n;$$

y vamos, sucesivamente, haciendo en la **(2)**:

$a = \varphi$ .... $b = \varphi$;
$a = \varphi$ .... $b = 2\varphi$;
$a = 2\varphi$ .... $b = 2\varphi$;
$a = 2\varphi$ .... $b = 3\varphi$;

se obtiene, con suma facilidad:

$$\cot 2\varphi = C_2 = \frac{c^2 - 1}{2c} \qquad (3).$$

$$\cot 3\varphi = C_3 = \frac{(c^2 - 3)c}{3c^2 - 1}.$$

$$\cot 4\varphi = C_4 = \frac{c^4 - 6c^2 + 1}{4(c^2 - 1)c}.$$

$$\cot 5\varphi = C_5 = \frac{(c^4 - 10c^2 + 5)c}{5c^4 - 10c^2 + 1};$$

y éstas, á su vez, nos dan:

$$\text{con } n\varphi = \pi \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \dfrac{\pi}{n} \\ C_n = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{ll} C_2^{-1} = 0 = c; & \cot\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ C_3^{-1} = 0 = 3c^2 - 1; & \cot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ C_4^{-1} = 0 = c^2 - 1; & \cot\dfrac{\pi}{4} = 1 \\ C_5^{-1} = 0 = 5c^4 - 10c^2 + 1; & \cot\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}} \end{array}$$

$$\text{y con } n\varphi = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \dfrac{\pi}{2n} \\ C_n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{ll} C_3 = 0 = c^2 - 3; & \cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} \quad (4) \\ C_4 = 0 = c^4 - 6c^2 + 1; & \cot\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \\ C_5 = 0 = 5c^4 - 10c^2 + 1; & \cot\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \end{array}$$

De la **(3)**, puesto que las *cc* han de ser positivas:

$$c = C_2 + \sqrt{C_2^2 + 1} \ldots \qquad (5).$$

Aplicando esta (**5**) á la (**4**), y llamando β á la que resulte:

$$\beta = \cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$$

Por la (**2**), con su signo inferior, si $\cot\frac{\pi}{10} = \alpha$:

$$c = \cot\frac{\pi}{60} = \cot\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta - \alpha};$$

que por su magnitud, mayor que 19, da ya bastante convergencia á la serie (**1**) (*). Con ocho decimales,

$$\beta = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205080,$$
$$\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3{,}07768353,$$
$$\beta - \alpha = 0{,}65436727;$$
$$\alpha\beta = 11{,}48607128.$$

Por consiguiente:

$$c = \cot 3^{\circ} = \cot\frac{\pi}{60} = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta - \alpha} = 19{,}08113662;$$

y

$$c^2 = 364{,}08977471.$$

La serie (**1**), multiplicando sus dos miembros por el divisor de π, nos da:

$$\pi = \frac{60}{c} - \frac{20}{c^3} + \frac{12}{c^5} - \dots + (-1)^n \frac{60\,(1 - \Delta_n)}{(2n+1)c^{2n+1}}.$$

Tomando *tres* términos, nada más, su *resto* vale:

$$R_3 = -\frac{1 - \Delta_3}{c^7} \cdot \frac{60}{7};$$

Como

$$\log_{10}(c^7) = 7\log_{10} c > 8{,}92,$$
$$\log_{10}\left(\frac{60}{7}\right) = \log_{10} 60 - \log_{10} 7 < 0{,}94,$$
$$\log_{10}\left(c^7 \cdot \frac{7}{60}\right) > 7{,}98,$$

(*) Mucho mayor que la $c = 5$ de la clásica fórmula de *Euler:*

$$\text{arccot}\ 1 = \frac{\pi}{4} = 4\ \text{arccot}\ 5 - \text{arccot}\ 239 = \text{arccot}\ \frac{119}{120} - \text{arccot}\ 239.$$

y, por lo tanto:

$$-R_3 = \frac{1-\Delta_3}{10^{7,98\ldots}} < \frac{1}{10^{7,98\ldots}}.$$

Obtendremos el valor de π con *siete* cifras decimales exactas. En efecto:

$$\begin{aligned} 60\,c^{-1} &= 3{,}14446677 \\ 12\,c^{-5} &= 0{,}00000474 \\ &\overline{3{,}14447151} \\ 20\,c^{-3} &= 0{,}00287883 \\ \pi &= \overline{3{,}14159268} + R_3. \end{aligned}$$

Por medio del término siguiente, y tomando dos cifras decimales más, veríamos que efectivamente son exactas las siete primeras, y excesiva la octava cifra decimal.

78. *Tabulación de logaritmos.*—Vimos en el número **70** que, si $x \not< 1$:

$$\log_e \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{Arg} Cth\, x = 2 \operatorname{Arg} Th\, x^{-1}.$$

Desarrollando este *argumento:*

$$\log_e \frac{x+1}{x-1} = 2\left[x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \frac{x^{-5}}{5} + \ldots\right];$$

y, asignando á x el valor

$$x = 2n-1, \quad (n \not< 1):$$

$$\log_e \frac{n}{n-1} = \log_e n - \log_e (n-1) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{1}{5(2n-1)^5} + \ldots\right] \quad \text{(S)}$$

Esta serie (S) nos suministra un excelente medio de *tabular* los logaritmos de base *e*. Sin más que ir dando valores á *n*, se van obteniendo las diferencias de dos logaritmos consecutivos, y, por ende, el valor de todos ellos. Sus términos son de facilísima formación. Calculado el primero, basta para obtener el segundo, dividirle por $3(2n-1)^2$. El tercero se deduce del segundo multiplicando por 3 y dividiendo por $5(2n-1)^2$; y así los demás.

Con $n=2$, y tomando *ocho* términos de la serie:

$$\log_e 2 = 0{,}69314718.$$

Pasado $\log_e 20$, para obtener el mismo número (*ocho*) de cifras decimales exactas, bastan *dos* términos. Después de $\log_e 437$, un solo término es suficiente.

Solamente hay que usarla para los números primos. El logaritmo del que no lo sea se obtiene sencillamente con la suma de los múltiplos de los logaritmos de los *primos*, cuyas potencias le compongan.

Para determinar el logaritmo neperiano del número 10, base de los *vulgares* ó decimales, con $n=5$:

$$\log_e\left(\frac{5}{4}=\frac{10}{8}=\frac{10}{2^3}\right)=\log_e 10 - 3\log_e 2 =$$

$$=2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\ldots\right].$$

Luego, no teniendo que tomar más que *cinco términos:*

$$\log_e 10 = 2{,}07944154\,(*) + 0{,}22314355 = 2{,}30258509.$$

Para pasar de los *neperianos* á los *vulgares*, como (número **68**)

$$\log_{10} n = \frac{\log_e n}{\log_e 10},$$

(*) La novena cifra decimal de $\log_e 2$ es *cero*.

basta multiplicar al *neperiano* por el *módulo*

$$M_{10} = (\log_e 10)^{-1} = 0{,}43429448.$$

79. *Formas aparentemente indeterminadas.*—Sucede, á veces, que en una función

$$f(u, v, x, y, z, ...)$$

al asignar á una de las variables, la x por ejemplo, el valor

$$x = a\,,$$

resultan términos de las formas indeterminadas

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0.\infty; \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad 1^\infty;$$

provenientes de las

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)};^{(*)} \quad \varphi(a).\psi(a); \quad \varphi(a) - \psi(a); \quad \varphi(a)^{\psi(a)}.$$

Como, llamando

$$\psi^{-1}(a) = \Psi(a)\,,$$

queda

$$\varphi(a).\psi(a) = \frac{\varphi(a)}{\Psi(a)};$$

haciendo $\varphi(a) = \dfrac{1}{\Phi(a)}$,

se tiene

$$\varphi(a) - \psi(a) = \frac{\Psi(a) - \Phi(a)}{\Phi(a).\Psi(a)};$$

y, tomando logaritmos,

$$\log \varphi(a)^{\psi(a)} = \log \varphi(a).\psi(a) = \frac{\log \varphi(a)}{\psi^{-1}(a)};$$

(*) Notación abreviada: $\varphi^{(a)}(x)\Big]_{x=a} = \varphi^{(n)}(a)$.

vemos que, en todos los casos, podemos llevar la forma indeterminada á las

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0},$$

ó

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

En la primer forma, desarrollando por Taylor, puesto que $\psi(a) = \varphi(a) = 0$:

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a) + h\left[\frac{1}{2}\varphi''(a) + \dots\right]}{\psi'(a) + h\left[\frac{1}{2}\psi''(a) + \dots\right]};$$

y, por lo tanto:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \left.\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}\right]_{h=0} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

En la segunda, escribiéndola

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\psi^{-1}(a)}{\varphi^{-1}(a)},$$

toma la anterior; y, por consiguiente,

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \left[\frac{D_x\psi^{-1}(x)}{D_x\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\,\frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}\right]_{x=a} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}\left(\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right)^2;$$

que, reduciendo y despejando, queda

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Lo mismo que en el caso de $0:0$, en este de $\infty:\infty$, basta hallar la relación de los valores especiales que toman las primeras derivadas con $x=a$. Así procederíamos hasta llegar á una relación determinada, que puede ser nula ó infinita. Pudiendo también suceder que no se consiga, y que sea realmente indeterminado el valor, por existir discontinuidad en la función con $x=a$.

LECCIÓN 9.ª

FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Diferenciaciones sucesivas.—Fórmulas de Taylor y de Mac-Laurin.—Máximos y mínimos.

80. Hemos visto en la Lección 5.ª que la variable más general es la cuatérnica; y, anteriormente, que todo cuaternio admite la forma binomia

$$q = \mathrm{S} + \mathrm{V},$$

ó la exponencial

$$q = \mathrm{T}.e^{v\theta} = e^{\log_e \mathrm{T} + v\theta};$$

que, llamando τ al logaritmo neperiano del tensor, puede escribirse

$$q = e^{\tau + v\theta}.$$

Como τ y θ son dos escalares (T, puede ser menor que la unidad) el exponente de un cuaternio, en exponencial de base e, es otro cuaternio

$$q_1 = \tau + v.\theta;$$

que á su vez puede ponerse en forma análoga; y así indefinidamente.

La forma binomia será muchas veces conveniente transformarla en la cuadrinomia, de versores cuadrantes invariables,

$$q = S + xi + yj + zk \,,$$

siendo x, y, z, las proyecciones del escalar $V : v$.

81. La incrementación del cuaternio, en esta su forma cuadrinomia, da:

$$\Delta^n q = \Delta^n S + \Delta^n x . i + \Delta^n y . j + \Delta^n z . k \,;$$

y, por lo tanto, en la infinitésima ó diferencial:

$$d^n q = d^n S + d^n x . i + d^n y . j + d^n z . k \,.$$

Es decir, que la diferenciación, con toda la latitud posible, puede en último término reducirse á la de los escalares. Y con la misma latitud, un escalar S podrá ser una función *escalar* cualquiera de otros $s_1, s_2, s_3 \ldots$:

$$S = f(s_1 \,,\; s_2 \,,\; s_3 \ldots).$$

Como, por que entren las demás *ss*, no deja de ser función de s_m:

$$d_{s_m} S = D_{s_m} f \, . \, d_{s_m} .$$

Denomínanse estos incrementos, *diferenciales parciales* de la función con respecto á la variable escalar s_m. El incremento que recibe la función S, por los de sus distintas variables, habrá de ser, evidentemente:

$$\Delta S = f[(s_1 + \Delta s_1),\, (s_2 + \Delta s_2), \ldots \; (s_m + \Delta s_m)] - f[s_1, s_2, \ldots s_m] \,;$$

que puede escribirse

$$\Delta S = \frac{f[s_1, s_2, \ldots (s_m + \Delta s_m)] - f[s_1, s_2, \ldots s_m]}{\Delta s_m} \Delta s_m$$

$$+ \frac{f[s_1, s_2, \ldots (s_{m-1} + \Delta s_{m-1}), s_m] - f[s_1, s_2, \ldots s_{m-1}, (s_m + \Delta s_m)]}{\Delta s_{m-1}} \Delta s_{m-1}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{f[(s_1 + \Delta s_1), s_2, \ldots s_m] - f[s_1, (s_2 + \Delta s_2), s_3, \ldots s_m]}{\Delta s_1} \Delta s_1;$$

$$+ \left[f[(s_1 + \Delta s_1, \ldots (s_m + \Delta s_m)] - f[(s_1 + \Delta s_1), s_2 \ldots s_m]\right]\left(\frac{\Delta s_m}{\Delta s_m} = 1\right).$$

Pasando de la finita á la incrementación infinitésima, los incrementos $\Delta\Delta$ se convierten en *dd; parciales* los Δs_m; *total*, que se dice, ó simplemente *diferencial de* S, el ΔS. Teniéndose, además,

$$\left.\frac{f[s_1, s_2, \ldots (s_m + \Delta s_m)] - f[s_1, s_2, \ldots s_m]}{\Delta s_m}\right]_{\Delta s_m = 0} = D_{s_m} S;$$

$$\left.\frac{f[s_1, s_2 \ldots (s_{m-1} + \Delta s_{m-1}), s_m] - f[s_1, s_2 \ldots (s_m + \Delta s_m)]}{\Delta s_{m-1}}\right]_{\Delta s_m = \Delta s_{m-1} = 0}$$

$$= \left.\frac{f[s_1, s_2 \ldots (s_{m-1} + \Delta s_{m-1}), s_m] - f[s_1, s_2 \ldots s_m]}{\Delta s_{m-1}}\right]_{\Delta s_{m-1} = 0} = D_{s_{m-1}} S$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\frac{f[(s_1 + \Delta s_1), s_2 \ldots s_m] - f[s_1, (s_2 + \Delta s_2), s_3 \ldots s_m]}{\Delta s_1}\right]_{\Delta s_2 = \Delta s_1 = 0}$$

$$= \left.\frac{f[(s_1 + \Delta s_1), s_2 \ldots s_m] - f[s_1, s_2, \ldots s_m]}{\Delta s_1}\right]_{\Delta s_1 = 0} = D_{s_1} S;$$

y, en resumen, como *diferencial total*:

$$dS = D_{s_1}S.ds_1 + D_{s_2}S.ds_2 + \dots + D_{s_m}S.ds_m$$
$$= d_{s_1}S + d_{s_2}S + \dots + d_{s_m}S;$$

la *suma de las diferenciales parciales.*

82. *Funciones implícitas.*—Si se tienen n ecuaciones con $n+1$ variables; con $n=3$, por ejemplo:

$$f_1(x, y, z, t) = C_1,$$
$$f_2(x, y, z, t) = C_2,$$
$$f_3(x, y, z, t) = C_3;$$

siendo C_1, C_2 y C_3 constantes; por diferenciación total quedan las n ecuaciones en dx, dy y dz:

$$\left.\begin{array}{l} D_xf_1.dx + D_yf_1.dy + D_zf_1.dz = -D_tf_1.dt \\ D_xf_2.dx + D_yf_2.dy + D_zf_2.dz = -D_tf_2.dt \\ D_xf_3.dx + D_yf_3.dy + D_zf_3.dz = -D_tf_3.dt \end{array}\right\} \quad (1)$$

Sólo cabe asignar valor arbitrario á uno de los incrementos parciales. Tomando como variable independiente la t, por ejemplo, se dice que las z, x é y son *funciones implícitas* de la t; y, por las (**1**), llamando $\mathfrak{D}$ al determinante de los coeficientes diferenciales,

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} D_xf_1, & D_yf_1, & D_zf_1 \\ D_xf_2, & D_yf_2, & D_zf_2 \\ D_xf_3, & D_yf_3, & D_zf_3 \end{vmatrix}$$

$$D_tx = -\begin{vmatrix} D_tf_1, & D_yf_1, & D_zf_1 \\ D_tf_2, & D_yf_2, & D_zf_2 \\ D_tf_3, & D_yf_3, & D_zf_3 \end{vmatrix} : \mathfrak{D}$$

$$D_t y = - \begin{vmatrix} D_x f_1, & D_t f_1, & D_z f_1 \\ D_x f_2, & D_t f_2, & D_z f_2 \\ D_x f_3, & D_t f_3, & D_z f_3 \end{vmatrix} : \mathfrak{D}$$

$$D_t z = - \begin{vmatrix} D_x f_1, & D_y f_1, & D_t f_1 \\ D_x f_2, & D_y f_2, & D_t f_2 \\ D_x f_3, & D_y f_3, & D_t f_3 \end{vmatrix} : \mathfrak{D}$$

Si no hay más que dos variables (x, y) y la ecuación

$$f(x, y) = C;$$

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = - \frac{D_x f}{D_y f}.$$

83. Volviendo á la diferenciación parcial: siendo S función de $s_1, s_2, s_3, \ldots s_m$, es evidente que, en general, las $d_{s_m}S$ habrán de serlo también; y que podrán, por lo tanto, diferenciarse nuevamente con respecto á cualquiera de las variables $s_1\, s_2 \ldots s_m$. La notación más clara para estas diferenciaciones sucesivas, es la de Cauchy:

$$d_{s_1} d_{s_1} d_{s_1} s = d_{s_1^3} s;$$

$$d_{s_1} d_{s_1} d_{s_2} s = d_{s_1^2 s_2} s;$$

$$d_{s_1} d_{s_2} d_{s_3} s = d_{s_1 s_2 s_3} s.$$

Como

$$d_{s_1} d_{s_2} S = d_{s_1}[f(s_1, (s_2 + ds_2), \ldots s_m) - f(s_1, s_2 \ldots s_m)]$$
$$= f[(s_1 + ds_1), (s_2 + ds_2), s_3 \ldots s_m] - f[(s_1 + ds_1), s_2 \ldots s_m]$$
$$- f[s_1, (s_2 + ds_2) \ldots s_m] + f[s_1, s_2 \ldots s_m]$$
$$= d_{s_2}[f((s_1 + ds_1), s_2 \ldots s_m) - f(s_1, s_2, \ldots s_m)] = d_{s_2} d_{s_1} S:$$

el orden de las diferenciaciones es indiferente.

Los incrementos parciales siendo independientes unos de otros, para la diferenciación parcial en s_1, por ejemplo, es *constante* ds_2, y viceversa. Por lo tanto,

$$D_{s_1} D_{s_2} S = D_{s_2} D_{s_1} S:$$

el orden de las derivaciones es también indiferente.

Para éstas, parécenos también más clara la notación de Cauchy:

$$D_{s_1} D_{s_1} S = D_{s_1^2} S;$$

$$D_{s_1} D_{s_1} D_{s_1} S = D_{s_1^3} S;$$

$$D_{s_1} D_{s_1} D_{s_2} S = D_{s_1^2 s_2} S = D_{s_2 s_1^2} S;$$

$$D_{s_1} D_{s_2} D_{s_3} = D_{s_1 s_2 s_3} S = D_{s_2 s_3 s_1}; \text{ etc.}$$

La de Leibnitz, en los mismos casos, es

$$\frac{d^2S}{ds_1^2}; \quad \frac{d^3S}{ds_1^3}; \quad \frac{d^3S}{ds_1^2 . ds_2}; \quad \frac{d^3S}{ds_1 ds_2 ds_3}; \text{ etc.}$$

Modernamente los alemanes han introducido la

$$D_{s_1} S = \frac{\partial S}{\partial s_1}.$$

No le encontramos ventaja alguna, y sí el grave inconveniente de emplear el símbolo δ, exclusivo de las diferenciales que se denominan *variaciones*, de que muy luego nos ocuparemos, y de significación opuesta. Algunos, para evitar esta inconsecuencia, emplean, en vez de la δ griega, la $\mathfrak{d}$ gótica. Cuando convenga escribir la derivada parcial cual cociente, lo natural es hacerlo como Cauchy:

$$D_{s_1} S = \frac{d_{s_1} S}{ds_1};$$

notación que reune la claridad y sencillez apetecibles.

84. Aplicando las reglas de la diferenciación, pasaremos de la diferencial primera (total) á la segunda; de la segunda á la tercera, etc.; sean funciones explícitas ó implícitas. Como ejemplos, trataremos la $z = f(x, y)$ y la $f(x, y) = 0$. De la primera, sin considerar equicrescente á ninguna de las variables:

$$dz = D_x f . dx + D_y f . dy ;$$

$$d^2z = d(D_x f)dx + D_x f . d^2x + d(D_y f) dy + D_y f . d^2y ;$$

y efectuando las operaciones indicadas, y reduciendo:

$$d^2z = D_{x^2} f . dx^2 + 2D_{xy} f . dxdy + D_{y^2} f . dy^2 + D_x f . d^2x + D_y f . d^2y .$$

Diferenciándola totalmente, del mismo modo, llegaríamos á obtener d^3z. Como no ofrece dificultad alguna, nos parece innecesario escribirla. Si x é y son funciones, á su vez, de otra variable común t, es decir, que la z sea (como ordinariamente se dice) *función compuesta* de t, dividiendo dz por dt

$$D_t z = \frac{dz}{dt} = D_x f . D_t x + D_y f . D_t y ; \ (*)$$

y la d^2z por dt^2:

$$D_{t^2} z = \frac{d^2z}{dt^2} = D_{x^2} f . (D_t x)^2 + 2D_{xy} f . D_t x D_t y + D_{y^2} f (D_t y)^2$$
$$+ D_x f . D_{t^2} x + D_y f . D_{t^2} y .$$

De la

$$f(x, y) = 0 ; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{D_x f}{D_y f} \qquad (\mathbf{1});$$

y, por lo tanto:

$$dy = -\frac{D_x f}{D_y f} dx .$$

(*) Si fuera de más, $f(x, y, u, v, ...)$:

$$D_t z = D_x f . D_t x + D_y f . D_t y + D_u f . D_t u + ...$$

Diferenciando:

$$d^2y = \frac{D_xf[D_{xy}f.dx+D_{y^2}f.dy]-D_yf[D_{x^2}f.dx+D_{xy}f.dy]}{(D_yf)^2}dx-\frac{D_xf}{D_yf}d^2x$$

que, con la (1), queda

$$d^2y = -\frac{D_{x^2}f.dx^2 + 2D_{xy}f.dxdy + D_{y^2}f.dy^2 + D_xf.d^2x}{D_yf};$$

y, si x es equicrescente (dx, constante):

$$d^2y = -\frac{D_{x^2}f.dx^2 + 2D_{xy}f.dxdy + D_{y^2}f.dy^2}{D_yf}.$$

y, así, las demás diferenciales.

85. En los sistemas de $n+1$ funciones con n escalares variables, del número **82**, puede entrar con ellos, en una, en varias, ó en todas las funciones, un escalar ó número α que, permaneciendo invariable en ciertos casos, haya que considerarlo variando en otros. Todos los escalares x, y, z, serán necesariamente funciones, no sólo del independiente t, sino también de esta cantidad α.

Se reserva la denominación de *diferenciales* para las incrementaciones infinitésimas de los x, y, z, y sus funciones, por la de t. A las que experimenten por la de α se las denomina, desde el siglo XVIII, *variaciones* (*), y distinguen con el símbolo funcional δ, en vez de d.

Por lo demostrado, para las diferenciaciones parciales, es evidente que

$$d\delta = \delta d,$$

es decir, los símbolos funcionales dd y $\delta\delta$ son conmutables.

Como toda función puede considerarse formando parte

(*) Con Lagrange, en la generalización «Variación de los Parámetros» del método seguido por Euler para la *braquistocrona*.

de un sistema (desconocido) y en ella entrará, por lo menos, el escalar ± 1, que siempre podemos considerarlo como valor especial de otro (α) más general, cualquier incrementación infinitésima *arbitraria* puede notarse y tratarse como *variación*.

Como ejemplo de variación de un *parámetro*:

$$f(x, y) = 2px - y^2:$$

$$\delta f = 2x.\delta p; \qquad \left.\begin{array}{l} d\delta f = 2dx.\delta p \\ \delta df = 2\delta p.dx \end{array}\right\} d\delta f = \delta df.$$

$$df = 2pdx - 2ydy;$$

86. *Derivaciones sucesivas del producto de dos escalares, funciones de un tercero:*

$$\Pi = y.z \left\{\begin{array}{l} y = f(x); \\ z = \varphi(x). \end{array}\right.$$

Aplicando las reglas, y la notación de Lagrange,

$$\Pi' = y'z + yz'.$$

$$\Pi'' = y''z + 2y'z' + yz''.$$

$$\Pi''' = y'''z + 3y''z' + 3y'z'' + yz'''.$$

Hasta aquí podemos escribir simbólicamente, con Leibnitz,

$$\Pi^{(n)} = (y + z)^{(n)};$$

expresando así, en el segundo miembro, que hay que desarrollar por la fórmula del binomio y sustituir luego los exponentes con índices de derivación; teniendo en cuenta que al exponente cero corresponde la derivada de orden cero, que es la función primitiva ó sin derivar.

Para demostrar que esa fórmula,

$$y^{(n)} = y^{(n)}z + ny^{(n-1)}z' + \frac{n(n-1)}{2!}\, y^{(n-2)}z'' + \dots$$

es general: derivando y reduciendo,

$$y^{(n+1)} = y^{(n+1)}z + (n+1)y^{(n)}z' + \frac{(n+1)n}{2!}y^{(n-1)}z'' + \dots;$$

lo vemos, efectivamente; puesto que, por ser cierta para la derivada enésima, tiene que serlo para la $(n+1)$.

87. Si en una función escalar, de varios escalares variables, x, y, z, ..., reciben éstos, sendos incrementos, evidentemente:

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

No siendo menos evidente que la incrementación recibida no cambiará de valor si suponemos constantes los de partida de las variables, x, y, z, ..., y llamando

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m_1, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = m_2, \quad \Delta x = u;$$

buscamos el incremento, por la variación de u:

$$f(x+u, \ y+m_1 u, \ z+m_2 u, \ \dots) - f(x+0, \ y+0, \ z+0, \ \dots).$$

Es decir, que nos bastará, para determinar el consiguiente incremento de f, aplicar la serie de Mac-Laurin á esta *función compuesta*, de la variable única u. Tenemos, para ello:

$$D_u f_0 = D_x f + D_y f \cdot m_1 + D_z f \cdot m_2 + \dots$$

$$\begin{aligned} D_{u^2} f_0 = & (D_{x^2} f + D_{xy} f \cdot m_1 + D_{zx} f \cdot m_2 + \dots) \\ & + (D_{xy} f + D_{y^2} f \cdot m_1 + D_{yz} f \cdot m_2 + \dots) m_1 \\ & + (D_{zx} f + D_{yz} f \cdot m_1 + D_{z^2} f \cdot m_2 + \dots) m_2 \\ & = D_{x^2} f + m_1{}^2 D_{y^2} f + m_2{}^2 D_{z^2} f + \dots + 2[m_1 D_{xy} f + m_1 m_2 D_{yz} f \\ & + m_2 D_{zx} f + \dots]; \text{ etc.} \end{aligned}$$

y análogamente, las demás derivadas. Con estos valores y la serie de Mac-Laurin:

$$\Delta f(x, y, z \ldots) = D_x f \Delta x + D_y f \Delta y + D_z f \Delta z + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2!} [D_{x^2} f \Delta x^2 + D_{y^2} f \Delta y^2 + D_{z^2} f \Delta z^2 + \ldots$$
$$+ 2D_{xy} f \Delta x \Delta y + 2D_{yz} f \Delta y \Delta z + 2D_{zx} f \Delta z \Delta x + \ldots]$$
$$+ \frac{1}{3!} [D_{x^3} f \Delta x^3 + \ldots\ldots]$$
$$+ \ldots\ldots$$

Para pasar, de esta serie de Taylor, á la de Mac-Laurin, basta asignar los valores $\Delta x = x$; $\Delta y = y$; $\Delta z = z$; ...; $x = y = z = \ldots = 0$.

88. En una función cuatérnica, de forma cuadrinomia y de versores cuadrantes invariables,

$$q = S + xi + yj + zk,$$

si los escalares S, x, y, z son funciones de otros, podremos desarrollarlos con la serie de Mac-Laurin; y sus incrementos finitos con la de Taylor.

89. Si los incrementos son infinitésimos, y seguimos llamando

$$\frac{dy}{dx} = m_1; \quad \frac{dz}{dx} = m_2; \ldots$$

aquella serie de Taylor nos da

$$df(x, y, z \ldots) = dx[D_x f + D_y f m_1 + D_z f m_2 + \ldots] + \frac{dx^2}{2!} [D_{x^2} f + D_{y^2} f m_1^2$$
$$+ D_{z^2} f m_2^2 + \ldots + 2D_{xy} f m_1 + 2D_{yz} f m_1 m_2 + 2D_{zx} f m_2 + \ldots]$$
$$+ \frac{dx^3}{3!} [D_{x^3} f + \ldots\ldots]$$
$$+ \ldots\ldots$$

Para la generalidad de los valores que pueden asignarse

á las variables x, y, z, ..., las derivadas parciales, $D_x f$, $D_y f$, $D_z f$, ..., tendrán valores finitos, y, por lo tanto, habrá que tomar como unidad á dx; quedando el *número*

$$\frac{df}{dx} = D_x f + D_y f . m_1 + D_z f . m_2 + ... \left\{ \begin{array}{l} \mp 0, \\ \mp \infty; \end{array} \right.$$

y, por consiguiente:

$$\frac{df}{+dx} = - \frac{df}{-dx}.$$

Para aquellos valores *generales*, la función crecerá ó decrecerá con los incrementos infinitésimos de las variables, si éstos tienen un signo, decreciendo ó creciendo si tienen el opuesto.

Para los valores particulares, si los hay, x_0, y_0, z_0 ..., con los que

$$[D_x f = D_y f = D_z f = ...]_{x_0, y_0, z_0, ...} = 0:$$

$$[df]_{x_0 ...} = \frac{dx^2}{2\,!} [D_{x^2} f + D_{y^2} f . m_1 + ...]_{x_0, ...};$$

ó, abreviadamente:

$$df_0 = \frac{dx^2}{2\,!} P_0.$$

Si $P_0 \mp 0$, vemos que el signo del incremento de la función es independiente del de las variables. Si $P_0 > 0$, la función crece lo mismo con $+dx$ que con $-dx$; se dice, por esto, que *pasa por un* valor *mínimo*, correspondiente á los especiales, x_0, y_0, z_0, ..., de sus variables. Si $P < 0$, decrece la función con la variación de éstas: *pasa por un máximo*.

Los valores especiales x_0, y_0, z_0, ..., quedarán precisados por las ecuaciones

$$D_x f = D_y f = D_z f = ... = 0;$$

y llevados á P_0, si no se anulan con ellos todas las derivadas segundas, por su signo se verá si corresponden á *mínimos* ó á *máximos*.

Si anulan á las segundas, y no á las terceras derivadas, claro es que el signo de $(dx)^3$ transciende al incremento de la función, y no hay ni máximos ni mínimos; siendo condición precisa, para su existencia, que el primer coeficiente diferencial que no anulen corresponda á una potencia par de dx. El signo de este coeficiente, no anulado por los valores especiales deducidos de aquellas ecuaciones, será el que diversifique las soluciones de máximos y de mínimos, que se comprende que pueden ser varios, puesto que varias podrán ser aquéllas. La circunstancia de ser máximos ó mínimos los valores solamente se relaciona con las proximidades de los valores dichos.

90. En el caso de dos variables, x é y:

$$P_0 = [D_{x^2}f + 2D_{xy}f \cdot m_1 + D_{y^2}f \cdot m_1^2]_{x_0,\, y_0};$$

que escribiremos, abreviadamente,

$$P_0 = A + 2Bm_1 + Cm_1^2 = \frac{(B + Cm_1)^2 + AC - B^2}{C}.$$

Para que el signo de P_0 sea independiente del valor *arbitrario* de la relación $\frac{dy}{dx} = m_1$, es *condición necesaria* que

$$AC - B^2 \not< 0.$$

Esta lo es, por consiguiente, para la existencia de máximos y mínimos. Cumplida,

$$\text{si} \quad C < 0; \quad P_0 < 0, \quad \textit{máximo};$$
$$\text{si} \quad C > 0; \quad P_0 > 0, \quad \textit{mínimo}.$$

91. Si la función es de una sola variable, bastará ver el

signo que toma su derivada segunda, ó la primera (de orden par) que no se anule.

Tanto en las de una variable como en las de varias, es á veces más cómodo que hallar las derivadas segundas, ver qué signo toma la diferencia

$$f(x_0 \pm dx, \quad y_0 \pm dy \ldots) - f(x_0, \quad y_0, \ldots).$$

92. Si un valor especial de una de las variables, ó de varias, el x_0 de x, por ejemplo, hace infinita á una de las derivadas primeras, llamando A al valor especial que, con esto, toma el primer coeficiente diferencial, es

$$A = \infty,$$

que, si proviene de

$$\frac{E}{dx^{\frac{m}{n}}},$$

$$df_0 = E dx^{\frac{n-m}{n}} + E' dx^2 + E'' dx^3 + \ldots;$$

siendo E, E',... los valores *especiales* de los coeficientes. Si $(n - m)$ es *par*, y se anulan todos los de las potencias impares de dx, inferiores á la $(n - m) : n$ vemos que, para x_0, el signo de df_0 es independiente del de dx, y, por consiguiente, corresponde á un mínimo ó á un máximo de la función, según que E sea mayor ó menor que cero.

EJERCICIOS DE DIFERENCIACIÓN (*)

---

93. *Funciones explícitas de una variable.*

1. $d\dfrac{a + bx + cx^2}{x} = \left(c - \dfrac{a}{x^2}\right)dx.$

2. $d\dfrac{x^4}{2(a^2 - x^2)} = \dfrac{x^3(2a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2}\,dx.$

3. $d(1 + 2x^2)(1 + 4x^3) = 4x(1 + 3x + 10x^3)dx.$

4. $d\dfrac{x^2 - 2a^2}{x - a} = \left[1 + \dfrac{a^2}{(x - a)^2}\right]dx.$

5. $d\dfrac{a - x}{\sqrt{x}} = -\dfrac{a + x}{2x^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

6. $d\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \dfrac{a^2}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx.$

7. $d(1 + x)\sqrt{1 - x} = \dfrac{1 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}\,dx.$

8. $d\dfrac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}} = (1 + x)^{-1}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

(*) Tomados, la mayor parte, del excelente epítome *(abridged)* de los Sres. Rice y Johnson.

9. $d\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}-x} = a^{-2}\left[\dfrac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}+2x\right]dx.$

10. $d(x + \text{sen}\, x \cos x) = 2\cos^2 x\, dx.$

11. $d(\text{sen}\, x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x) = \cos^3 x\, dx.$

12. $d(2\,\text{sen}\, x \sec^{\frac{1}{2}} x) = (1 + \cos^2 x)\sec^{\frac{3}{2}} x\, dx.$

13. $d\dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \text{tang}\, x} = \dfrac{\cos^3 x - \text{sen}^3 x}{(\cos x + \text{sen}\, x)^2}\, dx.$

14. $d(x + Sh\, x\, Ch\, x) = 2Ch^2 x\, dx.$

15. $d(Sh\, x + \frac{1}{3}Sh^3 x) = Ch^3 x\, dx.$

16. $d(2Sh\, x\, Sch^{\frac{1}{2}} x) = (1 + Ch^2 x)Sch^{\frac{3}{2}} x\, dx.$

17. $d\dfrac{Sh\, x}{1 + Th\, x} = \dfrac{Ch^3 x + Sh^3 x}{(Ch\, x + Sh\, x)^2}\, dx.$

18. $d(x^m \log_e x) = x^{m-1}(1 + m \log_e x)dx.$

19. $d \log_e \log_e x = (x \log_e x)^{-1} dx.$

20. $d \log_e \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(a - x)\sqrt{x}}\, dx.$

21. $d\left[\sqrt{x} - \log_e\left(\sqrt{x} + 1\right)\right] = \left[2\sqrt{x} + 2\right]^{-1} dx.$

22. $d \log_e \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

23. $d\, a^{x^2} = 2 \log_e a . a^{x^2} . x\, dx.$

24. $d\, e^{\frac{1}{1+x}} = -\dfrac{e^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^2}\, dx.$

25. $d\left[e^{x}(1-x^3)\right] = e^{x}(1-3x^2-x^3)dx.$

26. $d \operatorname{arcsen}(2x^2) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx.$

27. $d \operatorname{arcsen}(\cos x) = -\,dx.$

28. $d \operatorname{sen}(\arccos x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

29. $d \operatorname{arcsen}(\operatorname{tang} x) = \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tang}^2 x}}\,dx.$

30. $d \operatorname{arctang}\dfrac{mx}{1-x^2} = \dfrac{m(1+x^2)}{1+(m^2-2)x^2+x^4}\,dx.$

31. $d \operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} = (1-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

32. $d \operatorname{arcsec}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} = (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

33. $d \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = a(a^2+x^2)^{-1}\,dx.$

34. $d \operatorname{arctang}\dfrac{a+x}{1-ax} = (1+x^2)^{-1}\,dx.$

35. $d \operatorname{arctang}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{1}{2}\,dx.$

36. $d \operatorname{Arg} Sh(2x^2) = \dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^4}}\,dx.$

37. $d \operatorname{Arg} Sh(Th\, x) = \dfrac{Sch^2 x}{\sqrt{1+Th^2 x}}\,dx.$

38. $d \operatorname{Arg} Th\dfrac{mx}{1-x^2} = \dfrac{m(1+x^2)}{1-(m^2+2)x^2+x^4}\,dx.$

39. $d \operatorname{Arg} Ch\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} = (x^2+2x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

40. $d \operatorname{Arg} Csh \dfrac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$

41. $d \left[\log_e (x - a) - \dfrac{a(2x - a)}{(x - a)^2} \right] = \dfrac{x^2 + a^2}{(x - a)^3} dx.$

42. $d \left(a^2 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

43. $d \left(x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} \right) = \operatorname{arcsen} x . dx.$

44. $d \left[(x^2 + 1) \operatorname{arctang} x - x \right] = 2x \operatorname{arctang} x . dx.$

45. $d \left(\arccos x - 2\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \right) = (1 - x)^{\frac{1}{2}} (1 + x)^{-\frac{3}{2}} dx.$

46. $d (\operatorname{Arg} Th\, x - \operatorname{arctang} x) = 2x^2 (1 - x^4)^{-1} dx.$

47. $d \left(\operatorname{Arg} Ch \dfrac{x}{a} + \operatorname{arcsec} \dfrac{x}{a} \right) = \dfrac{1}{x} \sqrt{\dfrac{x + a}{x - a}} dx.$

48. $d \left(\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}} - \operatorname{Arg} Th\, x \right) = \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

49. $d \left(\dfrac{ax - 1}{\sqrt{1 + x^2}} e^{a . \operatorname{arctang} x} \right) = \dfrac{1 + a^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} e^{a . \operatorname{arctang} x} . dx.$

94. *Funciones de más de una variable.*

50. $d \log_e \operatorname{tang} \dfrac{x}{y} = 2 \dfrac{y dx - x dy}{y^2 \operatorname{sen} \dfrac{2x}{y}}.$

51. $d \operatorname{arctang} \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}.$

52. $d \dfrac{e^x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{y e^x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{x(x dy - y dx) e^x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

53. $$d\, x^{y^z} = x^{y^z} . y^z \left(\frac{dx}{x} + \frac{z}{y} \log_e x\, dy + \log_e x . \log_e y\, dz \right).$$

54. $$d\,[\text{sen}\,(xyz) . \cos\,(x+y+z)] =$$
$$= xyz \cos(xyz) \cos(x+y+z) \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right)$$
$$- \text{sen}(xyz)\, \text{sen}(x+y+z)\, (dx + dy + dz).$$

95. *Funciones implícitas.*

55. $x^{y^x} = y^{x^y}$;
$$dy = \frac{y \log_e y\,(1 + x \log_e x \log_e y - y \log_e x)}{x \log_e x\,(1 + y \log_e y \log_e x - x \log_e y)}\, dx.$$

56. $x^m + y^m - mxy = n$; $\quad dy = \dfrac{y - x^{m-1}}{y^{m-1} - x}\, dx.$

57. $x\, \text{sen}\, y - y\, \text{sen}\, x = m$; $\quad dy = \dfrac{y \cos x - \text{sen}\, y}{x \cos y - \text{sen}\, x}\, dx.$

58. $$\begin{cases} \text{sen}\, x + e^y + \log_e z = m\,; \\ \sqrt{x} + \text{arcsen}\, y + z^{-1} = n\,. \end{cases}$$
$$\begin{cases} dy = \dfrac{z^{-1} \cos x + \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{z^{-1} e^y + (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}}\, dx\,; \\ dz = \dfrac{\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} - (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos x}{z^{-1} e^y + (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}}\, z\, dx. \end{cases}$$

59. (Cicloide) $\begin{cases} x = r(\theta - \text{sen}\, \theta)\,; \\ y = r\, \text{senver}\, \theta\,. \end{cases}$ $\quad dy = \sqrt{2 \dfrac{r}{y} - 1}\, dx.$

60. (Epicicloide) $$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\dfrac{R + r}{r}\, \theta \right); \\ y = (R + r)\, \text{sen}\, \theta - r\, \text{sen}\left(\dfrac{R + r}{r}\, \theta \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy = -\dfrac{x - R\cos\theta}{y - R\,\text{sen}\,\theta}\,dx\,; \\ x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta = \dfrac{x^2 + y^2 + R(R + 2r)}{2(R + r)}\,. \end{cases}$$

61. (Hipocicloide) $\begin{cases} x = (R - r)\cos\theta + r\cos\left(\dfrac{R - r}{r}\,\theta\right); \\ y = (R - r)\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\left(\dfrac{R - r}{r}\,\theta\right). \end{cases}$

$$\begin{cases} dy = -\dfrac{x - R\cos\theta}{y - R\,\text{sen}\,\theta}\,dx\,; \\ x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta = \dfrac{x^2 + y^2 + R(R - 2r)}{2(R - r)}\,. \end{cases}$$

62. (Hélice ordinaria) $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = cR\,\text{arctang}\,\dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$ $\begin{cases} dx = -\dfrac{y}{cR}\,dz\,; \\ dy = \dfrac{x}{cR}\,dz\,. \end{cases}$

96. *Diferenciaciones sucesivas.*

63. $d^3 \log_e \text{sen}\,x \qquad = 2\cot x\,\text{cosec}^2 x\,dx^3.$

64. $d^4[x^3 \log_e(mx)] \qquad = 6\dfrac{dx^4}{x}\,.$

65. $d^2(e^x - 1)^{-1} \qquad = (e^{2x} + e^x)(e^x - 1)^3\,dx^2.$

66. $d^3 e^{x^{-1}} \qquad = -e^{x^{-1}}(1 + 6x + 6x^2)\,\dfrac{dx^3}{x^6}\,.$

67. $d^3\,e^{\text{sen}\,x} \qquad = -\dfrac{\text{sen}\,2x}{2}\,e^{\text{sen}\,x}(\text{sen}\,x + 3)\,dx^3.$

68. $d^n(\text{sen}^2 x) \qquad = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)dx^n\,.$

69. $d_{x^2y^2}(\text{sen}\,x\cos y) \qquad = \text{sen}\,x\cos y\,dx^2\,dy^2.$

70. $d_{x^2yz}\left(x^3z^4+e^xy^2z^3+x^2y^2z^2\right) = 2\left(3ye^xz^2+4yz\right)dx^2\,dy\,dz.$

97. *Indeterminación aparente.*

71. $\left.\dfrac{e^{mx}-e^{ma}}{x-a}\right]_a = m\,e^{ma}.$

72. $\left.\dfrac{(a^2+ax+x^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a+x)^{\frac{1}{2}}-(a-x)^{\frac{1}{2}}}\right]_0 = a^{\frac{1}{2}}.$

73. $\left.\dfrac{x(3x-2x^4)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{6}{5}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}\right]_1 = 4{,}05.$

74. $\left.\dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} 2x-\cos 2x-1}\right]_{\frac{\pi}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}}.$

75. $\left.\dfrac{\log \operatorname{sen} 2x}{\log \operatorname{sen} x}\right]_0 = 1.$

76. $\left.\dfrac{\log (x-1)}{\operatorname{tang} \dfrac{\pi x}{2}}\right]_1 = 0.$

77. $\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\log_e(1+x)}{x^2}\right]_0 = 0{,}5$

78. $\left[\operatorname{tang} x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{-2}\right]_{\frac{\pi}{2}} = \infty.$

79. $\left.x^{mx}\right]_0 = 1.$

80. $\left.x^{\frac{a+x}{\log_e x}}\right]_0 = e^a.$

81. $\left.(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]_0$ $e^{-1}.$

82. $\left. x^{\frac{a}{\log_e \operatorname{sen} x}} \right]_0 = e^a.$

83. $\left. (\operatorname{sen} x)^{\sec^2 x} \right]_{\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

84. $\left. x^{\frac{1}{x-1}} \right]_1 = e.$

85. $\left. \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} \right]_0 = 1.$

86. $\left. (1 \pm x)^{\frac{1}{x}} \right]_\infty = 1.$

87. $\left[x^m . (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tang} x} \times \left(\frac{\pi - 2x}{2 \operatorname{sen} 2x} \right)^3 \right]_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^m}{2^{m+3}}.$

98. *Máximos y mínimos.*

88. x^x : mín.º con $x = e^{-1}$.

89. $\frac{\log_e x}{x^n}$: máx.º con $x = e^{\frac{1}{n}}$.

90. $\frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 5x}}$: mín.º con $x = -\frac{1}{15}$.

91. $\operatorname{sen} 2x - x$: máx.os con $x = n\pi + \frac{1}{6}\pi$; mín.os con $x = n\pi - \frac{1}{6}\pi$.

92. $2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$: máx.º con $x = -3$; mín.º con $x = 2$.

93. $\frac{ax}{ax^2 - bx + a}$: máx.º con $x = 1$; mín.º con $x = -1$.

94. $\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$: mín.º con $x = \frac{1}{2}$.

95. $b + c[2x - a]^{\frac{4}{3}}$: mín.º con $x = \frac{a}{2}$.

96. $b + c[2x - a]^{\frac{5}{3}}$: ni máx.º, ni mín.º.

97. $\begin{cases} f(x, y) = 2\pi x(x + y), \\ \pi x^2 y = C \end{cases}$ mín.º con $y = 2x = 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

98. $\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz = C \end{cases}$ mín.º con $x = y = z = C^{\frac{1}{3}}$.

99. $f(x, y, z) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2 y}{z^4 + 2z^2 + 5}$; $\begin{cases} \text{mín.}^{\text{os}} \text{ con } x = 0. \\ y = n\pi. \\ z = \pm \infty. \end{cases}$

FIN DEL LIBRO I

FE DE ERRATAS

Páginas.	Líneas.	DICE	DEBE DECIR
XVI	39 y sig.tes	Idem de	
12	5	$\begin{matrix}\Delta x\\ \mathrm{L}\end{matrix}=0$	$\frac{\Delta x}{\mathrm{L}}=0$
17	5	(0)	$f(0)$
18	15	$\frac{n}{2\,!}$	$\frac{n^2}{2\,!}$
21	14	v^{m+1}	v^{m-1}
22	10	$u^{\frac{m}{n}}$	u^m
36	19	OA	Σ OA
41	5 y 6	$v(\alpha, \beta, \gamma)$	$w(\lambda, \mu, \nu)$
46	1 y 2	v	w
57	5	$d_2\varphi$	$d_2\rho$
57	28	$d_1\rho$	$d_1\mathrm{R}$
64	6	$\cos^2\frac{\varphi}{2}$	$\operatorname{sen}^2\frac{\varphi'}{2}$
64	7	$2\left(\frac{e^{\frac{\varphi}{k}}+e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2}\right)^2$	$\frac{2}{k}\left(\frac{ke^{\frac{\varphi}{2}k}+e^{-\frac{\varphi}{2}k}}{2}\right)^2$
67	10	$+\frac{p-q}{2}\,k$	$-\frac{p-q}{2}\,k$
69	8	$\mathrm{C}t\,\varphi$	$\mathrm{C}th\,\varphi$
73	7	$(y^2+1)^{\frac{1}{2}}$	$(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

Páginas.	Líneas.	DICE	DEBE DECIR
74	12	$Ct\,\varphi$	$Cth\,\varphi$
78	18	tercera	cuarta
78	21	h^2	k^2
78	22	cuarta	quinta
83	25	$\frac{d\Pi}{dt} = D_t\Pi$	$\frac{d\Pi}{\Pi dt} = \frac{D_t\Pi}{\Pi}$
89	14	$\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2} - 1}$	$\frac{\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2} - 1}}{\sqrt{k}}$
97	13	$5c^4 - 10c^2 + 1$	$c^4 - 10c^2 + 5$
105	12	s	S
107	16, 17 y 18	s	S
110	8	$n + 1$	$n - 1$
120	7	$(1 - x^2)^{-1}$	$(1 - x^4)^{-1}$
120	10	dx	xdx
122	12	$(e^x - 1)^3$	$(e^x - 1)^{-3}$
123	9	0,5	— 0,5
124	3	e	e^{-1}

ADICIÓN AL NÚMERO 39.—Página 46.

$$q = \left[\mathrm{T}^{\frac{\pi}{2\theta}} . e^{\frac{\pi}{2} w}\right]^{\frac{2\theta}{\pi}} = \left[\mathrm{T}^{\frac{\pi}{2\theta}} w\right]^{\frac{2\theta}{\pi}}:$$

el cuaternio, potencia escalar de un vector perpendicular á su plano.

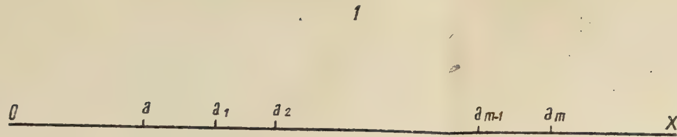
Lib.

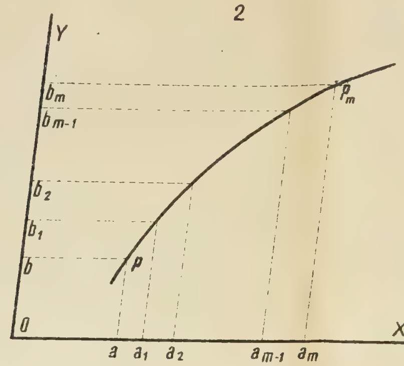


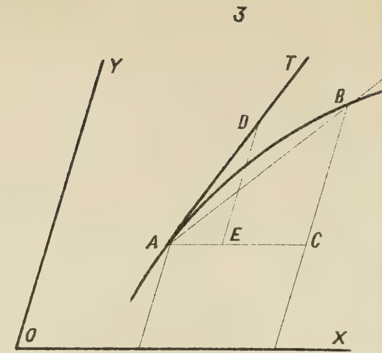


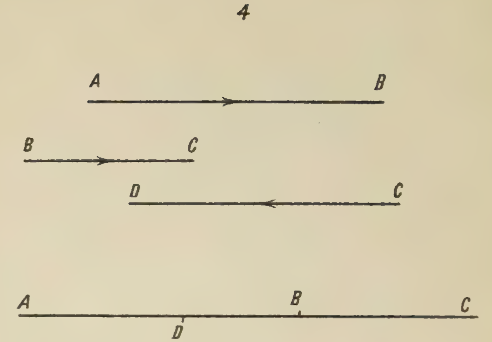


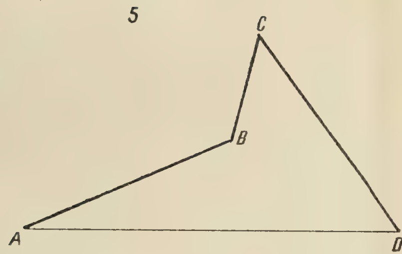


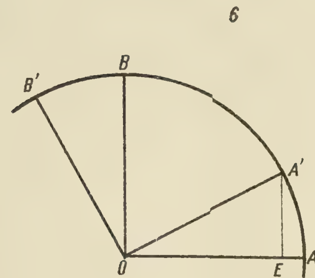


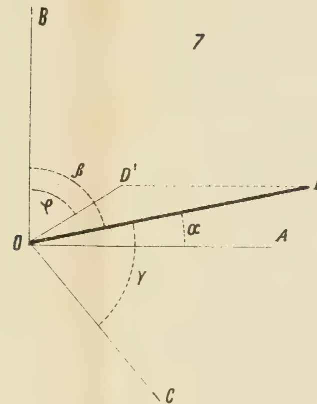


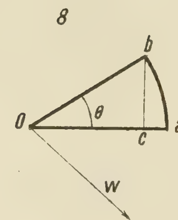


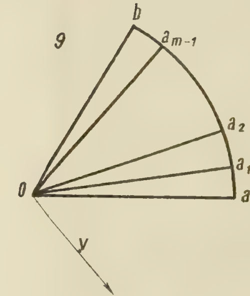


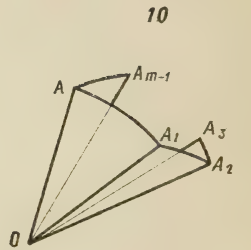


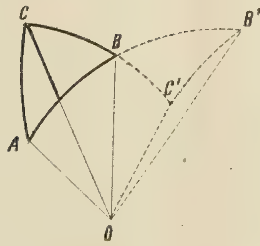


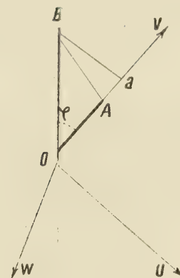


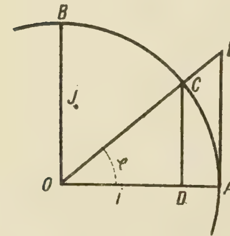


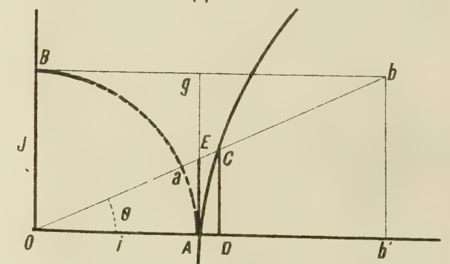












LIT. MENDEZ-ISABEL LA CATÓLICA, 25-MADRID.

LIBRO SEGUNDO

INTEGRAL

LIBRO II.—INTEGRAL

LECCIÓN DUODÉCIMA

POR PARTES

LECCIÓN DÉCIMOTERCERA

LECCIÓN DÉCIMOCUARTA

LECCION DÉCIMOQUINTA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y DE PRIMER ORDEN

LECCION DÉCIMOSEXTA

LECCIÓN DÉCIMOSÉPTIMA

LIBRO III.—APLICACIONES

LECCIÓN DÉCIMOCTAVA

LÍNEAS CURVAS

LECCIÓN DÉCIMONOVENA

CURVAS PLANAS

LECCIÓN VIGÉSIMA

CURVAS PLANAS

LECCIÓN VIGÉSIMOPRIMERA

RECTIFICACIÓN DE CURVAS EN GENERAL

LECCION VIGÉSIMOSEGUNDA

SUPERFICIES CURVAS

LECCIÓN VIGÉSIMOTERCERA

LECCIÓN 10.ª

REGLAS Y PROCEDIMIENTOS

99. Por lo establecido en la Lección primera para las $\Delta\Delta$ escalares y su generalización, en el núm. **42** de la quinta, á las vectoriales:

$$y - \beta = \Sigma_\beta^y \Delta y; \qquad y = \Sigma_\beta^y \Delta y + \beta;$$

$$\rho - \rho_0 = \Sigma_{\rho_0}^{\rho} \Delta\rho; \qquad \rho = \Sigma_{\rho_0}^{\rho} \Delta\rho + \rho_0;$$

y con incrementación infinitésima:

$$(0) \begin{cases} y = \int_\beta^y dy + \beta; \\ \rho = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho + \rho_0. \end{cases}$$

Si y es una función de un escalar x, y ρ de un vector ξ:

$$y = f(x); \qquad dy = \frac{df}{dx}.dx;$$

$$\rho = f(\xi); \qquad d\rho = \frac{df}{d\xi}.d\xi.$$

Llamando x_0 y ξ_0 á los valores precisos y determinados

(constantes) de las x y ξ, en correspondencia con los β y ρ_0 respectivos de las variables y y ρ las (**0**) nos darán:

$$y = \int_{x_0}^{x} f'(x).dx + f(x_0) \qquad (\mathbf{1});$$

$$\rho = \int_{\xi_0}^{\xi} f'(\xi).d\xi + f(\xi_0).$$

Por la identidad de forma, consideraremos comprendidos en la primera los dos casos (escalar y vectorial); dejando á las variables y á las funciones dd é $\int\int$ toda su generalidad.

Si conocemos la

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

y nada más, respecto á la variación continua de y, los valores (invariables con la de x) x_0 y $f(x_0)$ quedarán indeterminados; al valor $f(x_0)$ indeterminado é independiente de la variación de x, se denomina *constante* de la integración y se representa con la letra C. Los límites x_0 (indeterminado) y x (valor corriente ó general) dejan de escribirse, y solamente se pone

$$y = \int f'(x)dx + C'.$$

Esta $\int$ se dice ***indefinida.***

Como, por hipótesis, $y = f(x)$:

$$\int f'(x)dx = f(x) - C' = f(x) + C.$$

100. En un caso concreto en que se quiera determinar el valor preciso y_1, en correspondencia con el x_1 de x, y se conozca un par de valores simultáneos correspondientes (x_0 é y_0), se tendrá por la (**1**):

$$y_1 = \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx + [y_0 = f(x_0)] = f(x_1);$$

luego

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx = f(x_1) - f(x_0) \qquad (2),$$

que conviene muchas veces escribir, simbólicamente:

$$= \left[f(x)\right]_{x_0}^{x_1}.$$

La integral (2) se denomina *definida* (entre los límites x_0 y x_1). Si se invierten estos límites

$$\int_{x_1}^{x_0} f'(x)dx = f(x_0) - f(x_1) = -\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx:$$

cambia de signo la *integral definida.*

101. Cuando se tengan varios valores, precisos y sucesivos, de x

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots \quad x_{n-1}, \quad x_n,$$

es evidente, puesto que la $\int$ es una suma, escalar ó vectorial, que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f'(x)dx.$$

También, y por la misma razón, lo es que, si A es un factor que no varía con x,

$$(a) \begin{cases} \int Af'(x)dx = A\int f'(x)dx; \\ \int_{x_0}^{x_1} Af'(x)dx = A\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx. \end{cases}$$

Y que

$$(b) \begin{cases} \int [f'(x)dx \pm \varphi'(x)dx \pm \ldots] = \int f'(x)dx \pm \int \varphi'(x)dx \pm \ldots; \\ \int_{x_0}^{x_1} [f'(x)dx \pm \varphi'(x)dx \pm \ldots] = \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx \pm \int_{x_0}^{x_1} \varphi'(x)dx \pm \ldots. \end{cases}$$

102. La síntesis ó *integración* de la variable y, partiendo del conocimiento de su *elemento*

$$f'(x)dx,$$

se reduce á determinar á qué función $f(x)$ pertenece esta diferencial; ó, lo que es lo mismo, á qué función *primitiva*, que se dice, pertenece la derivada $f'(x)$. Esto en el caso de no depender la y más que de otra variable x.

103. En el caso de $u = f(x, y, z, t ...)$, hemos demostrado en el núm. **81** que

$$du = d_x f + d_y f + d_z f + d_t f + ...;$$

siendo *condición precisa*, por lo tanto, para que una expresión diferencial

$$f_1(x, y, z ...)dx + f_2(x, y, z ...)dy + f_3(x, y, z ...)dz + ...$$

pueda corresponder á un elemento diferencial

$$du = d\ f(x, y, z ...),$$

que tengamos

$$f_1 = D_x f; \quad f_2 = D_y f; \quad f_3 = D_z f; ... \qquad (1).$$

Para comprobar esta condición, no conociendo la $f(x, y, z ...)$, podemos eliminar su característica, aplicando la propiedad de la conmutabilidad de las derivaciones parciales; por la que:

$$(2) \begin{cases} D_y f_1 = (D_{xy} f = D_{yx} f) = D_x f_2; \\ D_z f_1 = (D_{xz} f = D_{zx} f) = D_x f_3; \\ D_z f_2 = (D_{yz} f = D_{zy} f) = D_y f_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Como las $f_1, f_2, f_3 ...$, si las conocemos, al comprobar las (**2**), podemos asegurar que se verifican las (**1**); y por consiguiente,

$$D_x f . dx = f_1 dx.$$

Integrando *indefinidamente*, y especificando la variable sobre que opera el símbolo $\int$ por medio de un subíndice,

$$\int_x D_x f . dx = \int_x f_1 dx = f + [C_x = \varphi(y, z ...)];$$

y, por lo tanto:

$$u = f(x, y, z ...) = \int_x f_1 dx - C_x \qquad (\mathbf{3}).$$

Para determinar esta $C_x = \varphi(y, z ...)$, derivando con relación á y:

$$(D_y f = f_2) = D_y \int_x f_1 dx - D_y \varphi(y, z ...);$$

y como consecuencia

$$D_y(C_x) . dy = [D_y \int_x f_1 . dx - f_2] dy.$$

Integrando con relación á y:

$$C_x = \int_y [D_y \int_x f_1 . dx - f_2] dy + [C_{xy} = \varphi_1(z ...)];$$

que transforma la (**3**) en

$$f = \int_x f_1 dx - \int_y (D_y \int_x f_1 dx - f_2) dy - \varphi_1;$$

y, de ésta,

$$\varphi_1 = \int_z D_z \varphi_1 . dz = -(D_z f = f_3) dz$$

$$+ \int_z D_z \left(\int_x f_1 dx + \int_y f_2 dy - \int_y \left[D_y \int_x f_1 dx \right] dy \right) dz + C_{xyz}.$$

Si no hubiese más que tres variables, esta C_{xyz}, ya será constante absoluta. Si las hay, la determinaríamos del mismo modo, continuando hasta llegar á una independiente del todo.

En el caso éste, más general, la integración viene á reducirse á operaciones de la forma

$$\int_x \psi(x)dx\,;$$

y el problema á hallar la $\Psi(xyz\,...)$ de que pueda ser diferencial parcial

$$\psi(xyz\,...)dx.$$

104. *Integración inmediata.*—Por las diferenciales fundamentales, números **19** y **21**, y las transcendentes de los **56, 59, 63, 64, 65** y **69:**

1.

$$\int x^m dx = {}^{(*)}\ \frac{x^{m+1}}{m+1} + C\,; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \frac{x_1^{m+1} - x_0^{m+1}}{m+1}.$$

2.

$$\int e^x dx = e^x + C\,; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = e^{x_1} - e^{x_0}.$$

3.

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C\,; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_0.$$

4.

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C\,; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \cos x_0 - \cos x_1.$$

5.

$$\int \operatorname{tang} x . \sec x\, dx = \sec x + C\,; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \sec x_1 - \sec x_0.$$

(*) Si $(m+1) \neq 0$.

6.

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tang} x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x_0.$$

7.

$$\int \cot x . \operatorname{cosec} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{cosec} x_0 - \operatorname{cosec} x_1.$$

8.

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \cot x_0 - \cot x_1.$$

9.

$$\int Sh\, x\, dx = Ch\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = Ch\, x_1 - Ch\, x_0.$$

10.

$$\int Ch\, x\, dx = Sh\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = Sh\, x_1 - Sh\, x_0.$$

11.

$$\int Sch^2 x\, dx = Th\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = Th\, x_1 - Th\, x_0.$$

12.

$$\int Csh^2 x\, dx = -Cth\, x + C; \qquad \int_{x_1}^{x_1} = Cth\, x_0 - Cth\, x_1.$$

13.

$$\int Th\, x\, Sch\, x\, dx = -Sch\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = Sch\, x_0 - Sch\, x_1.$$

14.

$$\int Cth\, x\, Csh\, x\, dx = -Csh\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = Csh\, x_0 - Csh\, x_1.$$

15.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{arcsen} x_1 - \operatorname{arcsen} x_0.$$

$$= -\arccos x + C'; \qquad = \arccos x_0 - \arccos x_1.$$

16.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{arcsec} x_1 - \operatorname{arcsec} x_0.$$

$$= -\operatorname{arccosec} x + C'; \qquad = \operatorname{arccosec} x_0 - \operatorname{arccosec} x_1.$$

17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2-x)x}} = \operatorname{arcsenver} x + C; \quad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{arcsenver} x_1 - \operatorname{arcsenver} x_0.$$

$$= -\operatorname{arccosver} x + C'; \qquad = \operatorname{arccosver} x_0 - \operatorname{arccosver} x_1.$$

18.

$$\int \frac{dx}{1+x_2} = \operatorname{arctang} x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{arctang} x_1 - \operatorname{arctang} x_0.$$

$$= -\operatorname{arccot} x + C; \qquad = \operatorname{arccot} x_0 - \operatorname{arccot} x_1.$$

19.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg} Ch\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{Arg} Ch\, x_1 - \operatorname{Arg} Ch\, x_0.$$

20.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arg} Sh\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{Arg} Sh\, x_1 - \operatorname{Arg} Sh\, x_0.$$

21.

$$(x<1) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg} Th\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{Arg} Th\, x_1 - \operatorname{Arg} Th\, x_0.$$

$$(x>1) \qquad = \operatorname{Arg} Ct\, x + C'; \qquad = \operatorname{Arg} Ct\, x_1 - \operatorname{Arg} Ct\, x_0.$$

22.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Arg} Sch\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{Arg} Sch\, x_0 - \operatorname{Arg} Sch\, x_1.$$

23.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{Arg} Csh\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \operatorname{Arg} Csh\, x_0 - \operatorname{Arg} Csh\, x_1.$$

24.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+)2x}} = \text{Arg Svh}\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \text{Arg Svh}\, x_1 - \text{Arg Svh}\, x_0.$$

25.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)x}} = \text{Arg.Cvh}\, x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \text{Arg Cvh}\, x_1 - \text{Arg Cvh}\, x_0.$$

Como ejercicio útil, todas estas *definidas,* hiperbólicas inversas, se escribirán, á continuación de su forma hiperbólica, en la logarítmica correspondiente, efectuándose la reducción á un logaritmo único (núm. **70**).

26.

$$\int \frac{dx}{x} = \log_e x + \log_e C = \log_e (Cx); \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \log_e \frac{x_1}{x_0}.$$

27.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = \frac{a^{x_1} - a^{x_0}}{\log_e a}.$$

28.

$$\int (1 + \log_e x) x^x dx = x^x + C; \qquad \int_{x_0}^{x_1} = x_1^{x_1} - x_0^{x_0}.$$

105. El problema general de la integración se reduce á traer la propuesta á una de estas fundamentales conocidas, valiéndonos de dos procedimientos que se deducen de los de diferenciación, además de los (*a*) y (*b*) del núm. **101**.

(*c*) Por la regla del núm. **15**, para efectuar la

$$Y = \int f[\varphi(x), \psi(x)]dx,$$

llamando

$$\varphi(x) = u \begin{cases} x = \varphi_1(u); \quad dx = \varphi'_1(u)du \\ f[\varphi(x), \psi(x)] = f_1(u); \end{cases}$$

queda

$$Y = \int f_1(u) . \varphi'_1(u) du = \int f_2(u)\, du,$$

que, si es de las conocidas, se integra y restablece luego la variable primitiva x. Este procedimiento se dice por *cambio de variable.*

(*d*) De las fórmulas 4.ª y 5.ª del núm. **19**,

$$d(u . v^{-1}) = du . v^{-1} - udv(v^{-2}),$$

y

$$d(u . v) = du . v + udv,$$

que realmente son una misma:

$$udv = d(u . v) - du . v;$$

ó *integrando indefinidamente* por la regla (*b*) del núm. **101**:

$$\int udv = u . v + C - \int du . v,$$

que si la $(du . v)$ es de integración conocida, resuelve el problema. La constante C puede omitirse, suponiendo que se suma á la que ha de dar la $\int du.v.$ Este procedimiento se denomina de *integración por partes.*

La regla (*a*), por su evidencia y uso constante, no merece considerarse como constitutiva de un procedimiento especial: viniendo á quedar éstos limitados á los de *descomposición, cambio de variable, y por partes,* que aplicaremos á continuación á las expresiones más frecuentes.

LECCIÓN 11.ª

DESCOMPOSICIÓN Y CAMBIO DE VARIABLE

106. *Diferenciales algébricas enteras:*

$$\int (Ax^m + A_1x^{m_1} + A_2x^{m_2} + \ldots)dx =$$

$$= A\int x^m dx + A_1\int x^{m_1}dx + A_2\int x^{m_2}dx + \ldots$$

$$= \frac{A}{m+1}x^{m+1} + \frac{A_1}{m_1+1}x^{m_1+1} + \frac{A_2}{m_2+1}x^{m_2+1} + \ldots + C.$$

107. *Diferenciales algébricas fraccionarias:*

$$\int\left(\frac{P_1}{P_2}\right)dx = \int\left(P + \frac{P_m}{P_n}\right)dx = \int P dx + \int\frac{P_m}{P_n}\,dx.$$

Siendo P, P_1, P_2 ... polinomios en x (P_m de menor grado que P_n). Para la $\int P dx$ basta aplicar la descomposición del número anterior. Descomponiendo, cuando se pueda, el polinomio P_n en sus factores de primero:

$$P_n = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n),$$

en que r_1, r_2 ... r_n son las n raíces de la ecuación

$$P_n = 0,$$

y a el coeficiente del término en x^n:

$$\frac{P_m}{P_n} = a^{-1} \frac{P_m = A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots A_{n-1}x + A_n}{(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)} dx.$$

Si todas las raíces son desiguales, siempre podremos escribir, siendo $B_1, B_2 \dots B_n$ *constantes:*

$$\frac{A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + . A_n}{(x - r_1)\dots(x - r_n)} = \frac{B_1}{x - r_1} + \frac{B_2}{x - r_2} + \dots \frac{B_n}{x - r_n};$$

puesto que, quitado los denominadores, pasado todo al segundo miembro y ordenado, nos quedará:

$$(B_1 + B_2 + \dots + B_n - A_1)x^{n-1} + (c_1B_1 + c_2B_2 + \dots c_nB_n - A_2)x^{n-2} + \dots$$
$$+ c_1^{(n-1)}B_1 + c_2^{(n-1)}B_2 + \dots c_n^{(n-1)}B_n - A_n = 0;$$

que se verificará idénticamente, determinando los valores de las n constantes $B_1, B_2 \dots B_n$ por medio de las n ecuaciones

$$B_1 + B_2 + \dots + B_n = A_1;$$
$$c_1B_1 + c_2B_2 + \dots + c_nB_n = A_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1^{(n-1)}B_1 + c_2^{(n-1)}B_2 + \dots + c_n^{(n-1)}B_n = A_n.$$

Si hubiere raíces *cuatérnicas* (que habrán de ser conjugadas) las r_1 y r_2, por ejemplo:

$$r_1 = \alpha + \beta i;$$
$$r_2 = \alpha - \beta i;$$

y se quiera tener la descomposición exclusivamente en *escalares:*

$$\frac{B_1}{x - (\alpha + \beta . i)} + \frac{B_2}{x - (\alpha - \beta i)} = \frac{(B_1 + B_2)(x - \alpha) + (B_1 - B_2)\beta i}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

Si la fracción que descomponemos en sumandos es escalar, y los demás sumandos lo son, este quebrado último habrá de serlo; es decir, que necesariamente ha de llegarse para las constantes B_1 y B_2 á dos cuaternios conjugados

$$B_1 = \alpha_1 + \beta_1 i;$$

$$B_2 = \alpha_1 - \beta_1 i;$$

y por lo tanto,

$$\frac{B_1}{x - r_1} + \frac{B_2}{x - r_2} = 2\,\frac{\alpha_1(x-\alpha) - \beta_1\beta}{(x-\alpha)^2 - \beta^2} = \frac{Mx + M_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

De haber *raíces dobles*, podemos considerarlas como dos cuatérnicas conjugadas en que se anula el escalar del vector ($\beta = 0$), para ellas la descomposición habrá de ser en

$$\frac{Mx + M_1}{(x-\alpha)^2},$$

siendo α la raíz doble. La anterior no es posible: tendríamos n ecuaciones para determinar $(n-1)$ constantes distintas.

Con multiplicidad mayor; en

$$\frac{M_1 x^{n-1} + M_2 x^{n-2} + \ldots M_n}{(x-\alpha)^n}.$$

Si el par de raíces cuatérnicas conjugadas fuese múltiple, la descomposición no podrá pasar de la

$$\frac{M_1 x^{2n-1} + M_2 x^{2n-2} + \ldots M_{2n-1}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}.$$

Todas estas constantes escalares ($M, M_1 \ldots$) se determinarán del mismo modo que las $B_1, B_2 \ldots$; y, en resumen, llegaremos á descomponer, la primitiva, en integrales de una de estas tres formas:

$$\frac{B}{a}\int\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{B}{a}\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=\frac{B}{a}\log_e(x-\alpha)+C\,;$$

$$\frac{M}{a}\int\frac{x^p dx}{(x-\alpha)^n}\,;$$

ó

$$\frac{M}{a}\int\frac{x^p dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,.$$

Esta última ya veremos más adelante cómo puede reducirse á formas de integración inmediata. La anterior las tomará con el cambio de variable

$$x-\alpha=y\,;\qquad x=\alpha+y\,;\qquad dx=dy\,;$$

108. *Ejemplo numérico:*

$$Y=\int\frac{3x^2-4x+2}{(x-3)[(x-2)^2+1]}\,dx\,.$$

Descomponiendo la fracción:

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x-3)[x-(2+i)][x-(2-i)]}=\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{x-(2+i)}+$$
$$+\frac{B_3}{x-(2-i)}\,;$$

que, quitados los denominadores, queda:

$$3x^2-4x+2=B_1[x^2-4x+5]+B_2[x^2-(5-i)x+3(2-i)]+$$
$$+B_3[x^2-(5+i)x+3(2+i)]\,.$$

Habiéndose de verificar idénticamente, exige las tres ecuaciones de primer grado, en B_1, B_2 y B_3:

$$B_1+B_2+B_3=3\,;$$
$$4B_1+(5-i)B_2+(5+i)B_3=4\,;$$
$$5B_1+3(2-i)B_2+3(2+i)B_3=2\,;$$

y, resuelto este sistema:

$$B_1 = \frac{17}{2}; \quad B_2 = -\frac{11+5i}{4}; \quad B_3 = \frac{-11+5i}{4}.$$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 &= \frac{11}{4} \\ -\beta_1 &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} M &= 2\alpha_1 = -\frac{11}{2} \\ M_1 &= -2(\beta\beta_1 + \alpha\alpha_1) = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Claro es que se abrevia haciendo, como es indispensable de haber raíces dobles, directamente:

$$3x^2 - 4x + 2 = B_1(x^2 - 4x + 5) + (Mx + M_1)(x - 3);$$

para obtener las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} &B_1 + M = 3; \\ &4B_1 + 3M - M_1 = 4; \\ &5B_1 - 3M_1 = 2. \end{aligned}$$

De la primera:

$$M = 3 - B_1.$$

De la tercera:

$$M_1 = \frac{5}{3} B_1 - \frac{2}{3}.$$

Llevando estos valores á la segunda:

$$\left(4 - 3 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}\right)B_1 = 4 - 9 - \frac{2}{3} = -\frac{17}{3};$$

y, por consiguiente,

$$B_1 = \frac{17}{2}; \quad M = -\frac{11}{2}; \quad M_1 = \frac{27}{2}.$$

La $\mathbf{Y}$ quedará *descompuesta* en las

$$\mathbf{Y} = \frac{17}{2}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{11}{2}\int\frac{xdx}{(x-2)^2+1} + \frac{27}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}.$$

Tenemos

$$\mathbf{Y}_1 = \int\frac{dx}{x-3} = \log_e(x-3) + \mathrm{C}.$$

Para integrar la

$$\mathbf{Y}_2 = \int\frac{xdx}{1+(x-2)^2},$$

cambiaremos de variable, haciendo

$$(x-2) = u \left\{ \begin{array}{l} x = u + 2, \\ dx = du; \end{array} \right.$$

y queda

$$\mathbf{Y}_2 = \int\frac{udu + 2du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2udu}{1+u^2} + 2\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{(1+u^2)} + 2\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\log_e(1+u^2) + 2\operatorname{arctang} u + \mathrm{C};$$

y, restableciendo la variable x:

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{2}\log_e(x^2-4x+5) + 2\operatorname{arctang}(x-2) + \mathrm{C}.$$

Haciendo el mismo cambio:

$$\mathbf{Y}_3 = \int\frac{dx}{1+(x-2)^2} = \operatorname{arctang}(x-2) + \mathrm{C}',$$

y como resultado final:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2}\left[17\log_e(x-3) - \frac{11}{2}\log_e(x^2-4x+5) + \right.$$

$$\left. + 5\operatorname{arctang}(x-2)\right] + \mathrm{C}.$$

109. La fracción

$$\frac{(Ax + B)dx}{1 \pm x^2};$$

puede integrarse inmediatamente, por descomposición, del modo siguiente:

$$Y = \pm \frac{A}{2} \int \frac{\pm 2x dx}{1 \pm x^2} + B \int \frac{dx}{1 \pm x^2}.$$

Con el signo superior:

$$Y = \frac{A}{2} \log_e (1 + x^2) + B \operatorname{arctang} x + C;$$

con el inferior:

$$Y = -\frac{A}{2} \log_e (1 - x^2) + B \operatorname{Arg} Th\, x + C.$$

110. En las circulares é hiperbólicas, pueden utilizarse para la descomposición las relaciones fundamentales

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$
$$Ch^2 x - Sh^2 x = 1,$$

de las que

$$\operatorname{tang}^2 x = \sec^2 x - 1;$$
$$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1;$$
$$Th^2 x = 1 - Sch^2 x;$$
$$Cth^2 x = Csh^2 x + 1;$$

obteniéndose, con ellas:

$$\int \operatorname{tang}^2 x\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx = \operatorname{tang} x - x + C;$$

$$\int \cot^2 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx = -\cot x - x + C;$$

$$\int Th^2 x\, dx = \int dx - \int Sch^2 x\, dx = x - Th\, x + C;$$

$$\int Cth^2 x\, dx = \int Csh^2 x\, dx + \int dx = -Cth\, x + x + C.$$

Por cambio de variable.

111. Es muy frecuente encontrar diferenciales de la forma

$$f(ax)dx\,,$$

siendo

$$f(u)du$$

de integral conocida. En este caso el cambio se reduce á hacer

$$ax = u\,; \quad x = a^{-1}u\,; \quad dx = a^{-1}u\,:$$

quedando, con él:

$$\mathrm{Y} = \int f(ax)dx = a^{-1}\int f(u)du = a^{-1}\mathrm{F}(u) + \mathrm{C}\,,$$

llamando, como es costumbre, F(u) á la primitiva de que es derivada la $f(u)$. Restableciendo la variable x:

$$\mathrm{Y} = a^{-1}\mathrm{F}(ax) + \mathrm{C}\,.$$

112. *Ejemplo:*

$$\mathrm{Y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x+2)2x}}\,;$$

llamando

$$2x = u\,; \quad 2dx = du\,;$$

y, con este cambio, nos queda:

$$\mathrm{Y} = \int \frac{du}{\sqrt{(u+2)u}} = \mathrm{Arg\,S}vh\, u + \mathrm{C}\,.$$

Restableciendo la variable x:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Arg\,S}vh(2x) + \mathrm{C}\,;$$

ó sea, en logarítmica:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = 2 \log_e \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + 2 \log_e C' =$$

$$= \log_e \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{C'^{-1}}\right)^2 = \log_e \left(\frac{C'}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)^2.$$

Análogamente se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \text{arcsenver}\,(2x) + C = -\,\text{arccosver}\,(2x) + C'.$$

113. Son también muy frecuentes las

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}};$$

que pueden escribirse:

$$\int \frac{d\left(u=\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\pm 1 \pm \left(u=\frac{x}{a}\right)^2}},$$

y nos da el cambio, con las tres combinaciones *escalares* de los signos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arcsen}\,\frac{x}{a} + C = -\,\text{arccos}\,\frac{x}{a} + C';$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \text{Arg}\,Sh\,\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{Arg}\,Ch\,\frac{x}{a} + C.$$

En la

$$Y = \int \frac{dx}{a^2 \pm x},$$

para preparar el cambio, podemos escribirla:

$$\mathbf{Y} = a^{-1} \int \frac{\frac{dx}{a}}{1 \pm \left(\frac{x}{a}\right)^2};$$

que, considerando como variable á $\frac{x}{a} = u$, nos da, con el signo superior:

$$\mathbf{Y} = a^{-1} \operatorname{arctang} \frac{x}{a} + \mathrm{C}.$$

Con el inferior:

$$\mathbf{Y} = a^{-1} \operatorname{Arg} \mathrm{T}h \frac{x}{a} + \mathrm{C} \qquad (x < a);$$

ó

$$\mathbf{Y} = -a^{-1} \operatorname{Arg} \mathrm{C}th \frac{x}{a} + \mathrm{C} \qquad (x > a).$$

114. Cuando en el denominador, bajo el radical cuadrado, esté completo el trinomio, de segundo grado, es decir, en las

$$\mathbf{Y} = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{T} = \pm a^2x^2 + bx + c}},$$

conviene escribir el trinomio, completando un cuadrado:

$$\mathrm{T} = \frac{4a^2c \mp b^2}{4a^2} \pm \left(ax \pm \frac{b}{2a}\right)^2;$$

y, si llamamos h^2 al valor absoluto de $4a^2c \mp b^2$:

$$\mathrm{T} = \pm \left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pm \left(ax \pm \frac{b}{2a}\right)^2;$$

en que los dobles signos segundo y tercero se corresponden.

En esta forma ya se ve que el cambio que debemos efectuar es el

$$ax \pm \frac{b}{2a} = \frac{h}{2a} u; \quad dx = \frac{h}{2a^2} du;$$

que transforma la **Y** en

$$\mathbf{Y} = \int \frac{\frac{h}{2a^2} du}{\sqrt{\left(\frac{h}{2a}\right)^2 [\pm 1 \pm u^2]}} = a^{-1} \int \frac{du}{\sqrt{\pm 1 \pm u^2}},$$

de integración inmediata.

115. Con idéntico trinomio en el denominador, pero sin radical, el mismo cambio nos da:

$$\int \frac{dx}{\pm a^2x^2 + bx + c} = \frac{2}{h} \int \frac{du}{\pm 1 \pm u^2},$$

de integración conocida.

116. Cuando el trinomio (de segundo grado en x, y bajo radical cuadrado) entra en una fracción algébrica, multiplicando á monomios cualesquiera, lo más conveniente es un cambio que haga desaparecer la forma irracional y lleve la integral al caso del núm. **107**. Si el coeficiente del término en x^2 es positivo, nos convendrá, para ello, el

$$\sqrt{a^2x^2 + bx + c} = \left(ax + \frac{b}{2a}\right) + u;$$

puesto que, elevando al cuadrado y reduciendo, nos queda:

$$c = \frac{b^2}{4a^2} + u^2 + 2\left(ax + \frac{b}{2a}\right) u;$$

y, por consiguiente,

$$\left(ax+\frac{b}{2a}\right)=\frac{4a^2c-b^2}{8a^2}u^{-1}-\frac{1}{2}u\,;$$

$$dx=\frac{b^2-4a^2c}{8a^3}u^{-2}\,du-\frac{1}{2a}\,du\,;$$

$$x=\frac{4a^2c-b^2}{8a^3}u^{-1}-\frac{1}{2a}u-\frac{b}{2a^2}\,;$$

$$\sqrt{a^2x^2+bx+c}=\frac{4a^2c-b^2}{8a^2}u^{-1}+\frac{1}{2}u\,;$$

valores que transforman la fracción en otra racional en u. Si el coeficiente de x^2 del trinomio es negativo, haremos:

$$\sqrt{-a^2x^2+bx+c^2}=c+xu\,.$$

Elevando al cuadrado y reduciendo:

$$b-a^2x=2cu+u^2x\,;$$

de la que

$$x=\frac{b-2cu}{a^2+u^2}\,;$$

y, por lo tanto, x, $c+xu$, y dx son racionales en u.

117. Una integral que se presenta con grandísima frecuencia, es la

$$Y=\int dx\sqrt{\pm x^2\pm m^2}\,,$$

á la que podíamos aplicar los cambios que acabamos de exponer, para racionalizarla; pero nos parece preferible, como ejercicio útil de transformaciones circulares é hiperbólicas, hacer los siguientes:

En la

$$Y=\int\sqrt{x^2+m^2}\,dx\,,$$

$$x=m\,\mathrm{Sh}\,u\,;\qquad u=\mathrm{Arg\,Sh}\,\frac{x}{m}\,;$$

$$dx=m\,\mathrm{Ch}\,u\,du\,;\qquad \sqrt{x^2+m^2}=m\,\mathrm{Ch}\,u\,;$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{Y} = m^2 \int Ch^2\, u\, du = \frac{m^2}{2} \int [1 + Ch(2u)]du$$

$$= \frac{m^2}{2} [u + \frac{1}{2} Sh(2u)] + C = \frac{m^2}{2} [u + Sh\, u . Ch\, u] + C.$$

Restableeiendo la variable x:

$$\mathbf{Y} = \frac{m^2}{2} \left[\text{Arg Sh} \frac{x}{m} + \frac{x}{m} \sqrt{1 + \frac{x^2}{m^2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \left[m^2 \text{ Arg Sh} \frac{x}{m} + x \sqrt{x^2 + m^2} \right] + C;$$

ó en logarítmica:

$$\int \sqrt{x^2 + m^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[m^2 \log_e \left(x + \sqrt{x^2 + m^2} \right) + x \sqrt{x^2 + m^2} \right] + C'.$$

Con cambios análogos, llegaremos á

$$\int \sqrt{x^2 - m^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[m^2 \text{ Arg Ch} \frac{x}{m} + x \sqrt{x^2 - m^2} \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \left[- m^2 \log_e \left(x + \sqrt{x^2 - m^2} \right) + x \sqrt{x^2 - m^2} \right] + C' \quad (a);$$

y, en la circular, á

$$\int \sqrt{m^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[m^2 \text{ arcsen} \frac{x}{m} + x \sqrt{m^2 - x^2} \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \left[- m^2 \text{ arccos} \frac{x}{m} + x \sqrt{m^2 - x^2} \right] + C'.$$

La (a), puesto que

$$- \log_e \left(x + \sqrt{x - m^2} \right) = \log_e \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - m^2}} = \log_e \frac{x - \sqrt{x^2 - m^2}}{m^2}$$

puede escribirse:

$$Y = \frac{1}{2}\left[m^2 \log_e \left(x - \sqrt{x^2 - m^2}\right) + x\sqrt{x^2 - m^2}\right] + C'''.$$

118. Para racionalizar expresiones algébricas en que entre un radical cuadrado, con binomio de primer grado, basta el cambio

$$\sqrt{ax+b} = u; \quad x = \frac{u^2 - b}{a}; \quad dx = 2\frac{u}{a}\,du.$$

119. Por cambio de variable podemos también integrar las circulares é hiperbólicas siguientes:

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\log_e(\cos x) + C;$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = \log_e(\operatorname{sen} x) + C;$$

$$\int Th\,x\,dx = \int \frac{Sh\,x\,dx}{Ch\,x} = \log_e(Ch\,x) + C;$$

$$\int Cth\,x\,dx = \int \frac{Ch\,x\,dx}{Sh\,x} = \log_e(Sh\,x) + C.$$

120. Por el mismo procedimiento:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{2d\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \log_e \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Para traer á esta forma la $\int \frac{dx}{\cos x}$, bastará el cambio

$$x = \frac{\pi}{2} - u.$$

con él:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = - \log_e \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C .$$

121. Siendo m impar, para la

$$Y = \int \operatorname{sen}^n x . \cos^m x . dx ,$$

el cambio conveniente es el

$$\operatorname{sen} x = u \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 . x = 1 - u^2 ; \\ \cos x \, dx = du ; \end{array} \right.$$

puesto que la transforma en

$$Y = \int u^n (1 - u^2)^{\frac{m-1}{2}} du ;$$

algébrica racional y entera. Análogamente llevaríamos á esta misma forma la

$$Y = \int \cos^n x . \operatorname{sen}^m x \, dx .$$

122. No siendo m impar, el cambio anterior nos suministra la

$$Y = \int u^n (1 - u^2)^{\frac{m-1}{2}} du ;$$

caso particular de la diferencial escalar, que se dice *binomia*,

$$u^m (a u^n + b)^p du \qquad (c);$$

que si p es entero y positivo, por el desarrollo de la potencia p, se descompondrá en un número determinado de monomias de integración inmediata. Puede también escribirse:

$$u^{m+pn} (a + b u^{-n})^p du \qquad (c').$$

En la forma (c), con el cambio

$$au^n + b = x : \begin{cases} u = [a^{-1}(x-b)]^{\frac{1}{n}}, \\ du = \left(na^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} (x-b)^{\frac{1-n}{n}} dx, \end{cases}$$

queda

$$\left(na^{\frac{m+1}{n}}\right)^{-1} (x-b)^{\frac{m+1}{n}-1} x^p dx \qquad (c_1).$$

En la (c'), con el

$$a + bu^{-n} = x \begin{cases} u = b^{-\frac{1}{n}} (x-a)^{-\frac{1}{n}}, \\ du = -n^{-1} b^{-\frac{1}{n}} (x-a)^{-\frac{n+1}{n}}, \end{cases}$$

toma la

$$-n^{-1} b^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)} (x-a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1} x^p dx \qquad (c_2).$$

Vemos, con las (c), (c_1) y (c_2), que las *condiciones de integrabilidad* son una de las tres siguientes:

$$\left.\begin{matrix} p \\ \dfrac{m+1}{n} \\ -\left(\dfrac{m+1}{n}+p\right) \end{matrix}\right\} \text{entero y positivo.}$$

LECCIÓN 12.ª

INTEGRACIÓN POR PARTES,

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

123. *Por partes.*—Este procedimiento, aisladamente, ó combinado con los dos anteriores, es de un uso casi incesante. Lo aplicaremos en primer lugar á expresiones circulares é hiperbólicas directas.

En la

$$\mathbf{Y} = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, (\operatorname{sen} x \, dx) = -\int \operatorname{sen} x \, (d \cos x)$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x + \mathrm{C} - \mathbf{Y};$$

Y, por lo tanto,

$$\mathbf{Y} = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + \mathrm{C}' = \frac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{4} + \mathrm{C}'.$$

En

$$\mathbf{Y}_1 = \int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= \frac{2x + \operatorname{sen}(2x)}{4} + \mathrm{C}.$$

Con las análogas hiperbólicas, llegaremos á

$$\int Sh^2x\,dx = \frac{Sh(2x) - 2x}{4} + C;$$

$$\int Ch^2x\,dx = \frac{Sh(2x) + 2x}{4} + C.$$

Como consecuencia, obtendremos las

$$\int \text{sen}^2x.\cos^2x\,dx = \frac{1}{8}\int \text{sen}^2(2x)d(2x) = \frac{4x - \text{sen}(4x)}{32} + C;$$

$$\int Sh^2x.Ch^2x\ dx = \frac{1}{8}\int Sh^2(2x)d(2x) = \frac{-4x + Sh(4x)}{32} + C.$$

124. En las logarítmicas, simples, circulares ó hiperbólicas, aplícase también la integración por partes:

$$\int \log_e x.dx = \log_e x.x - \int \frac{dx}{x}.x = x(\log_e x - 1) + C.$$

$$\int x^m \log_e x.dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log_e x - \frac{1}{m+1}\int \frac{dx}{x}.x^{m+1}$$

$$= \frac{[(m+1)\log_e x - 1]x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

$$\int \text{arcsen}\ x.dx = x.\text{arcsen}\ x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\ \text{arcsen}\ x + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d(1-x^2)}{2}$$

$$= x\ \text{arcsen}\ x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \text{Arg}\,Ch\,x.dx = x.\text{Arg}\,Ch\,x - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= x\,\text{Arg}\,Ch\,x - \sqrt{x^2-1} + C.$$

$$\int \operatorname{arcsec} x . dx = x . \operatorname{arcsec} x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= x \operatorname{arcsec} x - \operatorname{Arg} Ch\, x + C.$$

$$\int \operatorname{Arg} Th\, x\, dx = x . \operatorname{Arg} Th\, x - \int \frac{x\, dx}{1 - x^2}$$

$$= x \operatorname{Arg} Th\, x + \frac{1}{2} \log_e(1 - x^2) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \log_e \frac{1 + x}{1 - x} + \log_e(1 - x^2)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \log_e \left[(1 + x)^{(1+x)} \times (1 - x)^{(1-x)}\right] + C.$$

125. Y en otras transcendentes mixtas, como las que siguen:

$$Y_1 = \int e^x \cos x\, dx = e^x . \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \cos x + Y_2 + C_1$$

$$Y_2 = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x . \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - Y_1 + C_2$$

Resolviendo este sistema en Y_1 é Y_2:

$$Y_1 = \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) e^x + \text{const.}$$

$$Y_2 = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) e^x + \text{const.}$$

126. Cuando no se consiga inmediatamente llegar á una forma de las conocidas, podrá lograrse con sucesivas integraciones por partes; ó, cuando menos, á integrales más sencillas que la de partida. Denomínanse, las fórmulas que así se obtienen, de *reducción*.

Sea, por ejemplo, la

$$Y = \int x^m e^x dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx.$$

Si m es entero y positivo, aplicándola otras $(m-1)$ veces:

$$\mathbf{Y} = e^x[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \ldots \pm m!].$$

Si, siendo m positivo, no fuese entero, agotaríamos todos los contenidos en dicho número, reduciendo en lo posible el exponente de x. Con m negativo, nos convendrá la otra agrupación de factores,

$$\mathbf{Y} = \int e^x(x^{-m}dx) = -\frac{x^{-m+1}}{m-1} e^x + \frac{1}{m-1}\int x^{-m+1}e^x dx,$$

llegando, si m es entero, hasta la

$$\frac{1}{2-1}\int e^x \frac{dx}{x}.$$

127. *Reducción de las binomias.*—En las

$$\mathbf{Y} = \int x^m(ax^n + b)^p dx;$$

aquélla ha de procurar disminuir el valor absoluto de los exponentes m y p. Completando la diferencial de la potencia p, podemos escribir:

$$x^m(ax^n + b)^p dx = \frac{x^{m-n+1}}{(p+1)na}(ax^n + b)^p[(p+1)na\, x^{n-1}dx];$$

y aplicando la fórmula

$$\mathbf{Y} = \frac{(ax^n + b)^{p+1}x^{m-n+1}}{(p+1)na}$$

$$- \frac{m-n+1}{(p+1)na}\left[\mathbf{Y}_1 = \int x^{m-n}.(ax^n + b)^{p+1}dx\right] \quad (\mathbf{1}).$$

Esta fórmula (**1**) nos convendrá usarla cuando p sea negativo y los signos de m y n sean los mismos. Si $m-n+1$

no es cero (que si lo fuera no había que reducir, por ser integrable), despejando la $\mathbf{Y}_1$, y llamando $p+1=p_1$, $m-n=m_1$:

$$\int x^{m_1}(ax^n+b)^{p_1}dx = \frac{(ax^n+b)^{p_1}x^{m_1+1}}{m_1+1}$$

$$-\frac{p_1 na}{m_1+1}\int x^{m_1+n}(ax^n+b)^{p_1-1} \qquad (\mathbf{2}).$$

Esta (**2**) se utilizará cuando p sea positivo y los signos de m y n opuestos. La $\mathbf{Y}_1$ de la (**1**) puede descomponerse como sigue:

$$\mathbf{Y}_1 = \int x^{m-n}(ax^n+b)^p(ax^n+b)dx =$$

$$= a\int x^m(ax^n+b)^p dx + b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx.$$

Pasando la primera al primer miembro:

$$\left(1+\frac{m-n+1}{(p+1)n}\right)\mathbf{Y} = \frac{(ax^n+b)^{p+1}.x^{m-n+1}}{(p+1)na}$$

$$-\frac{(m-n+1)b}{(p+1)na}\int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx;$$

y despejando, si el coeficiente de $\mathbf{Y}$ no es nulo (que de anularse es integrable):

$$\mathbf{Y} = \frac{(ax^n+b)^{p+1}.x^{m-n+1}}{a(m+1+pn)}$$

$$-\frac{(m-n+1)b}{a(m+1+np)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx \qquad (\mathbf{3});$$

fórmula que sin alterar el exponente p reduce el m cuando es del mismo signo que n. En el caso contrario, despejando la última integral, con $m-n=m_1$ y quitando luego el índice, por innecesario:

$$\mathbf{Y} = \frac{(ax^n + b)^{p+1} . x^{m+1}}{(m+1)b}$$

$$- \frac{a(m+1+n+np)}{(m+1)b} \int x^{m+n}(ax^n + b)^p dx \qquad (\mathbf{4}).$$

Para reducir exclusivamente el exponente p, de ser positivo, integrando por partes la integral ($\mathbf{Y}_2$) del segundo miembro de la (**3**):

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1}(ax^n + b)^p - \frac{pna}{m-n+1} \int x^m(ax^n + b)^{p-1} dx\,;$$

y este valor transforma la (**3**), efectuadas las reducciones consiguientes, en:

$$\mathbf{Y} = \frac{(ax^n + b)^p x^{m+1}}{m+1+np} + \frac{pnb}{m+1+np} \int x^m(ax^n + b)^{p-1} dx \qquad (\mathbf{5}).$$

Si p es negativo, invirtiendo la (**5**), ó sea despejando la integral del segundo miembro:

$$\mathbf{Y} = - \frac{(ax^n + b)^{p+1} x^{m+1}}{(p+1)nb}$$

$$+ \frac{m+1+n(p+1)}{(p+1)nb} \int x^m(ax^n + b)^{p+1} dx \qquad (\mathbf{6}).$$

128. Como ejemplo, integremos la fracción á que se llega por descomposición, en el caso de dos pares de raíces cuatérnicas conjugadas (núm. **107**):

$$\mathbf{Y} = \int \frac{\mathrm{M}x^3 + \mathrm{N}x^2 + \mathrm{P}x + \mathrm{Q}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} dx.$$

Si se cambia, haciendo:

$$x - \alpha = \beta y\,; \quad x = \alpha + \beta y\,; \quad dx = \beta\, dy\,,$$

y llamamos

$$\mathbf{Y}_1 = M\int\frac{y^3dy}{(1+y^2)^2};$$

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{3M\alpha + N}{\beta}\int\frac{y^2dy}{(1+y^2)^2};$$

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{3M\alpha^2 + 2N\alpha + P}{\beta^2}\int\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2};$$

$$\mathbf{Y}_4 = \frac{M\alpha^3 + N\alpha^2 + P\alpha + Q}{\beta^3}\int\frac{dy}{(1+y^2)^2};$$

se tiene:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4.$$

Para la integración de $\mathbf{Y}_1$ convendrá aplicar la fórmula (**1**):

$$\int y^3(y^2+1)^{-2}dy = \frac{(y^2+1)^{-1}y^2}{-2} + \int\frac{2ydy}{y^2+1};$$

y, por consiguiente:

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{M}{2}\left[\log.(y^2+1)^2 - \frac{y^2}{y^2+1}\right] + C.$$

Para la $\mathbf{Y}_3$ como

$$\int\frac{ydy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\int(1+y^2)^{-2}d(1+y^2) = -\frac{1}{1+y^2} + \text{const.},\right]$$

$$\mathbf{Y}_3 = -\frac{3M\alpha^2 + 2N\alpha + P}{2\beta^2(1+y^2)} + C.$$

La de la $\mathbf{Y}_2$ podemos descomponerla del modo siguiente

$$\int\frac{y^2dy}{(1+y^2)^2} = \left[\int\frac{(1+y^2)dy}{(1+y^2)^2} = \int\frac{dy}{1+y^2}\right] - \int\frac{dy}{(1+y^2)^2}.$$

Ahora bien:

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctang} y + C.$$

Para la segunda, que es la misma de la $\mathbf{Y}_4$, aplicando la fórmula (**6**):

$$\int (1+y^2)^{-2} dy = -\frac{(y^2+1)^{-1} y}{-2} + \frac{1-2}{-2} \int (y^2+1)^{-1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y}{1+y^2} + \operatorname{arctang} y \right] + \text{C}.$$

Llevando estos valores á las $\mathbf{Y}_2$ é $\mathbf{Y}_4$, y restableciendo en todas la primitiva variable, con

$$y = \frac{x - \alpha}{\beta},$$

obtendríamos el de la $\mathbf{Y}$.

129. *Por desarrollo en serie.*—En el núm. **58**, al determinar el argumento de las líneas hiperbólicas, vimos ya cómo se podía integrar, determinando la función primitiva, por el desarrollo en serie de Mac-Laurin de ella misma. También se puede integrar, partiendo del desarrollo de la derivada:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1} + f''(0) \frac{x^2}{2\,!} + \dots,$$

que nos da

$$\int_a^x f(x) dx = f(0) \int_a^x dx + f'(0) \int_a^x x\, dx + f''(0) \frac{1}{2} \int_a^x x^2 dx + \dots$$

$$= f(0)(x-a) + f'(0) \frac{x^2 - a^2}{2\,!} + f''(0) \frac{x^3 - a^3}{3\,!} + \dots.$$

Del mismo modo:

$$\int f(x) x^m dx = f(0) \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + f'(0) \frac{x^{m+2} - a^{m+2}}{m+2}$$

$$+ f''(0) \frac{x^{m+3} - a^{m+3}}{(m+3)2\,!} + \dots.$$

130. Como ejemplo, la aplicaremos á la integración de la $e^x x^{-1} dx$. El desarrollo de e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Luego:

$$\int_a^x e^x x^{-1} dx = \int_a^x \frac{dx}{x} + \int_a^x dx + \frac{1}{2}\int_a^x x\, dx + \frac{1}{3!}\int_a^x x^2 dx + \dots$$

$$= \log_e \frac{x}{a} + (x - a) + \frac{x^2 - a^2}{2.2} + \frac{x^3 - a^3}{3!\,3} + \dots$$

131. Y también al desarrollo del *arcsen* x, cuya derivada desarrollada es:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots;$$

y, por lo tanto,

$$\text{arcsen}\ x = \int_0^x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \dots$$

LECCIÓN 13.ª

INTEGRALES MULTIPLES

DIFERENCIACIÓN DE INTEGRALES

132. *Integración dentro de una* $\int$.

En la

$$U = {}_x\int_a^x dx\, f(x,y),$$

siendo y independiente de x, puede suceder que $f(x,y)$ provenga de otra integración en y tal como

$$f(x,y) = {}_y\int_b^y dy\, f_1(x,y).$$

La U entonces tomará la forma:

$$U = {}_x\int_a^x dx\ {}_y\int_b^y dy\, f_1(x,y).$$

Si en la f_1 entra otra nueva variable (z) independiente de las dos anteriores, esta $f_1(x,y,z)$ podrá á su vez provenir de una integración en z:

$$f_1(x,y,z) = {}_z\int_c^z f_2(x,y,z)dz\,;$$

y se tendrá la integral *triple* (que se dice)

$$U = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z dz\, f_2(x, y, z).$$

Si en f_2 hay otra variable independiente t, y

$$f_2(x, y, z, t) = \int_d^t dt\, f_3(x, y, z, t):$$

la integral *cuádruple*

$$U = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z dz \int_d^t dt\, f_3(x, y, z, t).$$

Y así sucesivamente.

133. Estas integraciones múltiples ó sucesivas no son otra cosa sino el proceso inverso de las diferenciaciones sucesivas, comprendidas en la expresión

$$f_3(x, y, z, t) = D_{xyzt}(U).$$

Así como en las diferenciaciones era indiferente el orden, por la frecuencia con que en las aplicaciones se presentan estas integrales múltiples, nos conviene dejar establecido que también es indiferente el orden con que se efectúen; pudiéndose escoger el que facilite las operaciones. Llamemos

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^x dx \int_b^y dy\, f_1(x,y) = U\,; \\ &\int_b^y dy \int_a^x dx\, f_1(x,y) = V\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Derivando la primera con relación á x y la segunda con relación á y:

$$D_x U = \int_b^y dy\, f_1(x, y)\,;$$

$$D_y V = \int_a^x dx\, f_1(x, y).$$

Volviendo á derivar estas derivadas primeras, con relación á la otra variable:

$$D_{xy}U = f_1(xy) = D_{yx}V.$$

Luego:

$$D_x(D_yU).dx = d_x(D_yU) = f_1(x,y)dx = D_x(D_yV).dx = d_x(D_yV) \quad (2).$$

Integrando en x, desde a hasta x:

$$D_yU - D_yU\Big]_{x=a} = \int_{x=a}^{x} f_1(x,y)dx = D_yV - D_yV\Big]_{x=a}.$$

Multiplicando por dy é integrando (en y) desde b hasta y, como por la independencia de x é y

$$_y\int_b^y dy\ \varphi(a,y) = \Big[{}_y\int_b^y dy\ \varphi(x,y)\Big]_{x=a}:$$

$$U - U\Big]_{y=b} - \left(U\Big]_{x=a} - U\Big]_{\substack{x=a\\y=b}}\right) = {}_y\int_b^y dy\ {}_x\int_a^x dx\, f_1(x,y)$$

$$= V - V\Big]_{y=b} - \left(V\Big]_{x=a} - V\Big]_{\substack{x=a\\y=b}}\right).$$

Teniendo en cuenta las igualdades (1), las U y V se anulan con los valores especiales $x = a$, $y = b$; y estas últimas igualdades quedan reducidas á las

$$U = {}_y\int_b^y dy\ {}_x\int_a^x dx\, f_1(x,y) = V.$$

Pudiéndose invertir el orden de dos integraciones cualesquiera, claro es que podremos, por sucesivas inversiones, ordenar como queramos las que haya que efectuar, sea cual fuere la multiplicidad; quedando demostrado que tratándose de integrales *definidas* de límites de cualquier naturaleza, el orden de las integraciones es indiferente.

No así si alguna de las integrales es *indefinida.* Supongamos *indefinidos* los límites inferiores de las integrales en x y de las en y; al integrar *indefinidamente* la (**2**):

$$D_y U + \varphi(y,z,t...) = \int_x dx\, f_1(x,y,z,t...);$$

puesto que la constante *indefinida* en la integración en x podrá ser, con toda generalidad, una función indeterminada de las demás variables. Multiplicando por dy é integrando en y, también *indefinidamente,* tendremos:

$$U + \int_y \varphi(y,z,t...)dy + \Psi(x,z,t...) = \int_y dy \int_x dx\, f_1(x,y,z...) = V.$$

Es decir,

$$U + \Phi(y,z,t...) + \Psi(x,z,t...) = V.$$

Si la integración en x fuese *definida* (desde a hasta x) continuando *indefinida* la en y, para $x = a$: $U = 0, V = 0$; esas dos funciones tendrán que satisfacer á la condición

$$\Phi(y,z,t...) + \Psi(a,z,t...) = 0;$$

pero tampoco se anularán. Esta condición, transforma la última igualdad en:

$$V = U + \Psi(x,z,t...) - \Psi(a,z,t...).$$

134. *Diferenciación de integrales.*—Siendo la diferenciación y la integración operaciones inversas, claro es que

$$d_x \int_x f(x)dx = f(x)dx.$$

Como la integral definida $\int_{x=\gamma}^{x} f(x)dx$, si á γ la dejamos in-

determinada (expresando todos los valores constantes posibles) es la misma integral *indefinida*, y tan independiente de x como la constante indeterminada γ, lo es la determinada a:

$$d_x {}_x\int_a^x f(x)dx = f(x)dx.$$

En la *completamente definida*, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

luego

$$d_x \int_a^b f(x)dx = d_x[F(b) - F(a)] = 0.$$

135. Cuando se complica más la operación es al tener que diferenciar con respecto á una variable distinta de la á que se refiere la integración. Sea la integral definida

$$U = \int_{x=u}^{x=v} f(x, \alpha)dx,$$

la que tengamos que diferenciar con respecto á α. Como esta diferencial es el incremento infinitésimo producido por la variación infinitésima de α:

$$d_\alpha U = d_\alpha \int_{x=u}^{x=v} f(x, \alpha)dx = \int_{x=u+d_\alpha u}^{x=v+d_\alpha v} f(x, \alpha + d\alpha)dx - \int_{x=u}^{x=v} f(x, \alpha)dx.$$

La primera integral del último miembro, descomponiéndola en los sumandos correspondientes del intervalo total, puede escribirse:

$$\int_{x=u}^{x=v} f(x, \alpha + d\alpha) + \int_{x=v}^{x=v+d_\alpha v} f(v, \alpha + d\alpha)dv - \int_u^{u+d_\alpha u} f(u, \alpha + d\alpha)du.$$

Por consiguiente:

$$d_\alpha \mathrm{U} = \left[\int_u^v f(x, \alpha + d\alpha)dx - \int_u^v f(x, \alpha)dx = \int_u^v [f(x, \alpha + d\alpha) - \right.$$

$$\left. - f(x, \alpha)]dx \right] + \int_v^{v+d_\alpha v} f(x, \alpha + d\alpha)dv - \int_u^{u+d_\alpha u} f(u, \alpha + d\alpha)du\,;$$

ó sea

$$d_\alpha \mathrm{U} = \int_u^v d_\alpha [f(x, \alpha)dx] + \int_v^{v+d_\alpha v} f(v, \alpha + d\alpha)dv - \int_u^{u+d_\alpha u} f(u, \alpha + d\alpha)du\,.$$

Siendo continua la función f, $f(v, \alpha + d\alpha)$ diferirá de $f(v, \alpha)$ en un infinitésimo de primer orden; y lo mismo $f(u, \alpha + d\alpha)$ de $f(u, \alpha)$; por consiguiente, dejando de escribir los de segundo:

$$\int_v^{v+dv} f(v, \alpha + d\alpha)dv = \int_v^{v+dv} f(v, \alpha)dv = \Big[\mathrm{F}(v, \alpha)\Big]_v^{v+dv} = d_v \mathrm{F}(v, \alpha) = f(v, \alpha)dv\,;$$

$$\int_u^{u+du} f(u, \alpha + d\alpha)du = \int_u^{u+du} f(u, \alpha)du = \Big[\mathrm{F}(u, \alpha)\Big]_u^{u+du} = d_u \mathrm{F}(u, \alpha) = f(u, \alpha)du\,.$$

Queda, pues, en resumen:

$$d_\alpha \mathrm{U} = \int_u^v d_\alpha [f(x, \alpha)dx] + f(v, \alpha)d_\alpha v - f(u, \alpha)d_\alpha u\,.$$

En el caso de ser v (límite superior) independiente de α se anula (con $d_\alpha v$) el segundo término; si lo es u el tercero. Si ambos límites son independientes de α, queda únicamente el primer término: *para diferenciar una integral definida con respecto á otra variable distinta de la de la integración, en el caso de ser los límites independientes de aquélla, basta diferenciar dentro del signo integral.*

La integral indefinida puede considerarse, según varias veces lo hemos ya manifestado, como la definida

$$\int_{x=\gamma}^{x} f(x, \alpha)dx;$$

en la que el límite superior sí es independiente de α. Como en la constante *indeterminada* γ pueden hallarse comprendidas todas las funciones posibles de α:

$$d_\alpha \int f(x, \alpha)dx = \int_\gamma^x d_\alpha[f(x, \alpha)dx] - [f(\gamma, \alpha)d_\alpha\gamma = \varphi(\alpha)d\alpha],$$

siendo φ una característica arbitraria. Esta diferenciación no puede tener utilidad alguna con integrales indefinidas, puesto que da un resultado completamente arbitrario, en lo que al parámetro α se refiere. En las *definidas* puede servir para facilitar la integración, como en el segundo ejemplo veremos.

136. *Ejemplos:* 1.°

$$U = \int_{x=0}^{x=a} a\,dx\,; \qquad d_a U = \int_{x=0}^{x=a} da\,.dx + a\,da - 0 = 2a\,da.$$

Comprobación:

$$U = a\int_0^a dx = a^2\,; \qquad d_a U = 2a\,da.$$

2.°

$$U = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}\,; \qquad d_a U = \int_0^a \frac{-2a\,da\,dx}{(a^2+x^2)^2} + \frac{da}{a^2+a^2}$$

$$= -2a\,da\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} + \frac{da}{2a^2} \qquad (1).$$

Ahora bien:

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right];$$

luego

$$d_a U = -\frac{da}{a^2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] + \frac{da}{2a^2} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{da}{a^2}.$$

Comprobación:

$$U = \frac{1}{a}\left[\text{arctang}\,\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi}{4a}\,; \qquad d_a U = -\frac{\pi}{4}\,\frac{da}{a^2}.$$

La utilidad de esta diferenciación se puede apreciar despejando en la (1) el término en que entra la integral más complicada, y efectuando la sencilla:

$$2a\,da\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = -d_a\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} + \frac{da}{2a^2}$$

$$= -d_a\left(\frac{\pi}{4a}\right) + \frac{da}{2a^2} = \frac{\pi}{4}\frac{da}{a^2} + \frac{da}{2a^2};$$

y, por consiguiente:

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{8a^3}[\pi+2].$$

137. *Cálculo de variaciones.*—Donde más aplicación tiene la diferenciación de integrales es en la investigación de las funciones que puedan hacer máximos ó mínimos los valores de una integral definida. Para dar una idea de esta clase de problemas, trataremos uno de mínimo absoluto y otro de mínimo relativo. El primero será el clásico de Euler de la curva de *menor tiempo* de descenso *(braquistocrona)* de un cuerpo abandonado á la acción de la gravedad, al que no se opongan resistencias de ninguna clase. Demostraremos en Mecánica que siendo $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ el elemento de curva recorrido, de coordenadas x, y, z; si el eje de las yy es el vertical; H la altura del punto B de caída, y h la del A de llegada; el elemento de tiempo empleado en recorrer el elemento (ds) de la curva, es

$$dt = c\frac{ds}{\sqrt{H-y}};$$

y, por consiguiente, el tiempo total empleado en bajar, á lo largo de la curva, de B á A:

$$T = c\int_{y=h}^{y=H} \frac{ds}{\sqrt{H-y}}.$$

El problema consiste en determinar qué curva ha de satisfacer, entre las infinitas que pueden pasar por los puntos A y B, á la condición de dar un valor mínimo á esa cantidad T, y, por consiguiente, á su proporcional:

$$\mathbf{Y} = \int_h^H \frac{ds}{\sqrt{H - y}}.$$

Considerando como variable independiente la y, las dos ecuaciones, en escalares, de la curva buscada, serán de las formas $z = f(y)$, $x = F(y)$. Ahora bien; dos funciones de distinta característica (f, f_1), podemos siempre igualarlas á otra de una característica única (φ), introduciendo dos escalares arbitrarios (α, β) del modo siguiente:

$$f(y) = \varphi(\alpha, y); \qquad \text{de la que:} \qquad y = \Phi_1(\alpha);$$

$$f_1(y) = \varphi(\beta, y); \qquad \text{ídem íd.:} \qquad y = \Phi_2(\beta);$$

que, por la eliminación de y, nos da

$$\Phi_1(\alpha) = \Phi_2(\beta); \qquad \beta = \psi(\alpha).$$

Se ve así que la variación de las funciones $f(y)$ y $F(y)$, al pasar de una á otra de las curvas posibles, puede considerarse como debida exclusivamente á la de un cierto parámetro α, variando con él las coordenadas x, z y sus diferenciales.

La condición común á máximos y mínimos, por la variación exclusiva de α, habrá de ser:

$$D_\alpha \mathbf{Y} = \frac{d_\alpha \mathbf{Y}}{d\alpha} = 0;$$

ó sea, sencillamente, con la notación del núm. **85**.

$$\delta \mathbf{Y} = \delta \int_h^H \frac{ds}{\sqrt{H - y}} = 0.$$

Por la regla de diferenciación, con respecto á un parámetro independiente de los límites, nos queda:

$$\int_h^H \delta \frac{ds}{\sqrt{H-y}} = 0.$$

Habiendo tomado á y como variable independiente, tanto dy, como $\sqrt{H-y}$, é y, son independientes del parámetro, y se tiene:

$$\delta\, ds = \delta(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{-\frac{1}{2}}(2dx\,\delta\,dx + 2dz\,\delta\,dz)$$

$$= \frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \frac{dz}{ds}\,\delta\,dz = \frac{dx}{ds}\,d\,\delta x + \frac{dz}{ds}\,d\,\delta z.$$

Y, con esto, se reduce la condición á

$$\int_h^H \left(\frac{dx}{ds\sqrt{H-y}}.d\,\delta x + \frac{dz}{ds\sqrt{H-y}}.d\,\delta z \right) = 0.$$

Integrando por partes:

$$\left[\frac{dx}{ds\sqrt{H-y}}.\delta x + \frac{dz}{ds\sqrt{H-y}}.dz \right]_h^H$$

$$-\int_h^H \left(\delta x.d\,\frac{dx}{ds\sqrt{H-y}} + \delta z.d\,\frac{dz}{ds\sqrt{H-y}} \right) = 0.$$

Por pasar todas las curvas, que consideramos, por los puntos invariables B($y = $H) y A($y = h$), es evidente que en ellos la comunidad de coordenadas trae consigo $\delta x = \delta z = 0$, y la consiguiente anulación de la parte integrada; no quedándonos más que

$$\int_h^H \left(\delta x.d\,\frac{dx}{ds\sqrt{H-y}} + \delta z.d\,\frac{dz}{ds\sqrt{H-y}} \right) = 0.$$

Siendo completamente arbitrarias las dos variaciones δx, δz, esta anulación trae consigo como necesarias las dos:

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{H-y}}=0;$$

$$d\frac{dz}{ds\sqrt{H-y}}=0.$$

De su integración:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{ds\sqrt{H-y}}=C_1\\[2ex] \dfrac{dz}{ds\sqrt{H-y}}=C_2\end{array}\right\}\quad \frac{dx}{dz}=\frac{C_1}{C_2}=C_3 \qquad \text{(ecuación de una recta).}$$

La curva es plana y se halla situada en el vertical determinado por los puntos A y B. Tomando su plano, como de las x, y, queda la ecuación única:

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}\sqrt{H-y}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{H-y}}=C_1;$$

despejando $\frac{dy}{dx}$, y llamando $\frac{1}{C_1^2}=2r$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\frac{r}{H-y}-1};$$

ecuación diferencial de una *cicloide* (ejercicio **59**). Por la naturaleza del problema se ve que ha de corresponder á un mínimo de T, pues no admite máximo.

138. El *máximo ó mínimo relativo* consiste en el de una integral, cuando simultáneamente se tiene otra, con las mismas variables, y de un valor determinado.

Pondremos como ejemplo la determinación de la curva de centro de gravedad más bajo, para una misma longi-

tud (l) de curva desarrollada, comprendida entre los puntos fijos A y B. La expresión que da la altura (y_1) del centro de gravedad, es:

$$y_1 = \frac{\int_h^H y ds}{l};$$

la condición simultánea, la

$$l = \int_h^H ds = \text{const.} \qquad (\mathbf{1}).$$

El mínimo de y_1 exige que

$$\delta \int_h^H y ds = 0 .$$

La (**1**) que:

$$\delta \int_h^H ds = 0 ;$$

La simultaneidad de ambas, siendo C un coeficiente invariable arbitrario:

$$\delta \int_h^H y ds + C\delta \int_h^H ds = \int_h^H (y + C)\delta ds = 0 ;$$

ó sea:

$$\int_h^H (y + C) \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) = 0 ;$$

y, necesariamente, procediendo como en el ejemplo anterior:

$$d \frac{(y + C)dx}{ds} = 0 ,$$

$$d \frac{(y + C)dz}{ds} = 0 ;$$

é integradas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(y + C)dx}{ds} &= C_1 ; \\ \frac{(y + C)dz}{ds} &= C_2 ; \end{aligned} \right\} \frac{dx}{dz} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \text{(curva plana vertical).}$$

Tomando su plano como de *xx, yy,* queda la ecuación única

$$\frac{(y+C)dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = C_1;$$

ó bien:

$$\frac{y+C}{C_1} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Despejando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y+C}{C_1}\right)^2 - 1}; \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y+C}{C_1}\right)^2 - 1}};$$

que, con el cambio

$$\frac{y+C}{C_1} = u; \qquad dy = C_1 du;$$

toma la forma:

$$dx = C_1 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = C_1 d \operatorname{Arg} Ch\left(u = \frac{y+C}{C_1}\right).$$

Integrando, si llamamos C′ á la constante de esta integración,

$$\frac{x+C'}{C_1} = \operatorname{Arg} Ch \frac{y+C}{C_1}; \qquad \frac{y+C}{C_1} = Ch \frac{x+C'}{C_1};$$

ecuación de una *catenaria.*

Para determinar las tres constantes C_1, C, C′, siendo a y a' las abscisas de los puntos A y B, se tiene:

$$\frac{h+C}{C_1} = Ch \frac{a+C'}{C_1} \qquad (\mathbf{1});$$

$$\frac{H+C}{C_1} = Ch \frac{a'+C'}{C_1} \qquad (\mathbf{2});$$

$$l=\int_h^H\left[ds=dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right]=\int_h^H dy\,\frac{y+C}{C_1\sqrt{\left(\frac{y+C}{C_1}\right)^2-1}}$$

$$=C_1\left[\sqrt{\left(\frac{H+C}{C_1}\right)^2-1}-\sqrt{\left(\frac{h+C}{C_1}\right)^2-1}\right]$$

$$=C_1\left[Sh\,\frac{a'+C'}{C_1}-Sh\,\frac{a+C'}{C_1}\right]$$

$$=2C_1.Ch\,\frac{\frac{1}{2}(a+a')+C'}{C_1}\,.\,Sh\,\frac{a'-a}{2C_1};$$

$$\frac{l}{2C_1}=Ch\,\frac{a'+a+2C'}{2C_1}\,.\,Sh\,\frac{a'-a}{2C_1} \qquad (\mathbf{3}).$$

El punto más bajo (x_0, y_0), en el que $\frac{dy}{dx}=0$, vendrá dado por las

$$Sh\left(\frac{x_0+C'}{C_1}\right)=0; \qquad x_0=-C'.$$

$$\frac{y_0+C}{C_1}=1; \qquad y_0=C_1-C.$$

Transportando á él el origen, la ecuación se reduce á

$$\frac{y}{C_1}+1=Ch\,\frac{x}{C_1}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{C_1}}+e^{-\frac{x}{C_1}}\right);$$

y de ella

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x}{C_1}}+e^{-\frac{x}{C_1}}+2\right)=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x}{2C_1}}+e^{-\frac{x}{2C_1}}\right)^2.$$

Las (**1**), (**2**) y (**3**), quedan con este origen:

$$\frac{h_0}{C_1}+1=Ch\,\frac{a_0}{C_1} \qquad (\mathbf{1'}),$$

$$\frac{H_0}{C_1}+1=Ch\,\frac{a'_0}{C_1} \qquad (\mathbf{2'}),$$

$$\frac{l}{2C_1}=Ch\,\frac{a'_0+a_0}{2C_1}\,Sh\,\frac{a'_0-a_0}{2C_1} \qquad (\mathbf{3'}).$$

Restando de la (**2'**) la (**1'**), llamando b á la diferencia de altura $(H - h)$ de los puntos de suspensión y β á su distancia horizontal $(a'_0 - a_0)$:

$$\frac{b}{C_1} = Ch \frac{a'_0}{C_1} - Ch \frac{a_0}{C_1} = 2Sh \frac{a'_0 + a_0}{2C_1} Sh \frac{\beta}{2C_1};$$

$$\frac{l}{C_1} = 2Ch \frac{a'_0 + a_0}{2C_1} Sh \frac{\beta}{2C_1}.$$

Dividiendo una por otra:

$$\frac{b}{l} = Th \frac{a'_0 + a_0}{2C_1} \left\{ \begin{array}{l} Ch \dfrac{a'_0 + a_0}{2C_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{l^2}}} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2 - b^2}}; \\ Sh \dfrac{a'_0 + a_0}{2C_1} = \dfrac{b}{l} \dfrac{l}{\sqrt{l^2 - b^2}} = \dfrac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}}. \end{array} \right.$$

Con estos valores tendremos, para la determinación del parámetro C_1:

$$\frac{b}{C_1} = 2 \frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} . Sh \frac{\beta}{2C_1}; \qquad C_1 Sh \frac{\beta}{2C_1} = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{2};$$

ó en exponenciales

$$C_1 \left(e^{\frac{\beta}{2C_1}} - e^{-\frac{\beta}{2C_1}} \right) = \sqrt{l^2 - b^2}.$$

LECCIÓN 14.ª

FUNCIONES DE VALOR INVARIABLE

139. Expusimos en el núm. **103** el método (de Cauchy) para la integración de la diferencial total de una cierta función $u = f(x, y, z, t...)$, una vez reconocida la circunstancia de ser los distintos coeficientes M, N, P, Q... las derivadas parciales respectivas de una misma función; es decir, teniéndose

$$du = (M = D_x f)dx + (N = D_y f)dy + (P = D_z f)dz + ...$$

Si el valor de la función fuese invariable,

$$u = f(x, y, z, t...) = \text{const.};$$

quedaría la expresión diferencial:

$$Mdx + Ndy + Pdz + ... = 0 \qquad \textbf{(1)};$$

á que corresponde la ecuación finita integral:

$$f(x, y, z...) = C.$$

La (**1**), si las distintas funciones que hemos representado

con las letras M, N, P... admiten un factor común θ que haya desaparecido, podrá presentarse en la forma

$$M_1dx + N_1dy + P_1dz + \ldots = 0 \qquad (2);$$

en que ya, por la desaparición del factor θ, sus coeficientes no pueden ser derivadas parciales de una misma función. Para *integrarla* (que se dice) necesitaremos previamente determinar ese factor, que se denomina por ello, *integrante ó de integrabilidad.* Con el restablecimiento del factor:

$$M = M_1.\theta; \quad N = N_1.\theta; \quad P = P_1.\theta \ldots$$

Como las condiciones de integrabilidad eran

$$\begin{aligned} D_yM &= D_xN ; \\ D_zM &= D_xP ; \\ D_tM &= D_xQ ; \\ D_zN &= D_yP ; \\ D_tN &= D_yQ ; \\ D_tP &= D_zQ ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

poniendo los valores anteriores, y llamando $u = \log_e \theta$,

$$\frac{D_x\theta}{\theta} = D_xu, \quad \frac{D_y\theta}{\theta} = D_yu, \quad \frac{D_z\theta}{\theta} = D_zu \ldots;$$

obtendremos, siendo n el número de variables, las $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones para determinar las n derivadas parciales de u:

$$\begin{aligned} M_1D_yu - N_1D_xu &= D_xN_1 - D_yM_1 ; \\ M_1D_zu - P_1D_xu &= D_xP_1 - D_zM_1 ; \\ M_1D_tu - Q_1D_xu &= D_xQ_1 - D_tM_1 ; \\ P_1D_yu - N_1D_zu &= D_zN_1 - D_yP_1 ; \\ Q_1D_yu - N_1D_tu &= D_tN_1 - D_yQ_1 ; \\ Q_1D_zu - P_1D_tu &= D_tP_1 - D_zQ_1 ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pasando de tres el número de las variables, si éstas son independientes, el sistema será, en general, incompatible.

140. En el caso de tres variables (x, y, z), las tres ecuaciones son:

$$P_1 D_y u - N_1 D_z u = D_z N_1 - D_y P_1 \dots = \alpha ;$$
$$M_1 D_z u - P_1 D_x u = D_x P_1 - D_z M_1 \dots = \beta ;$$
$$N_1 D_x u - M_1 D_y u = D_y M_1 - D_x N_1 \dots = \gamma .$$

Multiplicando la primera por M_1, la segunda por N_1, la tercera por P_1, y sumándolas:

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = 0 \qquad (1).$$

De no existir entre los coeficientes de la expresión diferencial y sus derivadas parciales, este enlace, no admite factor integrante, y no puede provenir de una diferenciación total. Comprobado que hayamos esta condición, queda reducido el sistema á las dos únicas:

$$\left.\begin{aligned} P_1 D_y u &= \alpha + N_1 D_z u ; \\ P_1 D_x u &= -\beta + M_1 D_z u . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Teniéndolas en cuenta:

$$P_1(D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz) = \alpha\, dy - \beta\, dx +$$
$$+ D_z u(M_1 dx + N_1 dy + P_1 dz = 0).$$

Es decir:

$$P_1 du = \alpha\, dy - \beta\, dx ;$$

$$du = \frac{\alpha}{P_1}\, dy - \frac{\beta}{P_1}\, dx \qquad (a.$$

Análogamente:

$$du = \frac{\beta}{M_1}\, dz - \frac{\gamma}{M_1}\, dy \qquad (b.$$

$$du = \frac{\gamma}{N_1}\, dx - \frac{\alpha}{N_1}\, dz \qquad (c.$$

Sus condiciones de integrabilidad son:

$$D_x\left(\frac{\alpha}{P_1}\right) + D_y\left(\frac{\beta}{P_1}\right) = 0 \qquad \textbf{(3)};$$

$$D_y\left(\frac{\beta}{M_1}\right) + D_z\left(\frac{\gamma}{M_1}\right) = 0 \qquad \textbf{(4)};$$

$$D_z\left(\frac{\gamma}{N_1}\right) + D_x\left(\frac{\alpha}{N_1}\right) = 0 \qquad \textbf{(5)}.$$

Cuando, además de verificarse la (**1**), tiene lugar una de éstas, (la (**4**), por ejemplo), la expresión admite un factor integrante, función de dos variables (y, z) exclusivamente; cuyo logaritmo se obtiene integrando la (b) respectiva.

Ejemplo:

$$3x^2dx - \frac{x^3}{y}\cos z\, dy + x^3\log_e y \operatorname{sen} z\, dz = 0.$$

Esta no es de integrabilidad inmediata, pero en ella:

$$\alpha = 0; \qquad \beta = 3x^2\log_e y \operatorname{sen} z; \qquad \gamma = \frac{3x^2}{y}\cos z;$$

y, por lo tanto;

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = -\frac{3x^5}{y}\log_e y \operatorname{sen} z \cos z + $$
$$+ \frac{3x^5}{y}\log_e y \operatorname{sen} z \cos z = 0:$$

admite factor integrante. Y, como:

$$D_y\left(\frac{\beta}{M_1}\right) = D_y(\log_e y \operatorname{sen} z) = \frac{\operatorname{sen} z}{y},$$

$$D_z\left(\frac{\gamma}{M_1}\right) = D_z\left(\frac{\cos z}{y}\right) = -\frac{\operatorname{sen} z}{y},$$

se cumple la (**4**), y tendremos por la (b):

$$d(u = \log_e\theta) = \log_e y \operatorname{sen} z\, dz - \cos z\frac{dy}{y} = -d(\log_e y \cdot \cos z);$$

es decir:

$$\log_e \theta = -\log_e y . \cos z = \log_e (y^{-\cos z});$$

y, por lo tanto:

$$\theta = y^{-\cos z}.$$

Con este factor, la expresión diferencial queda

$$d\,f(x,y,z) = M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0\,,$$

siendo:

$$M = 3x^2 y^{-\cos z};$$

$$N = -x^3 \cos z\, y^{-(1+\cos z)};$$

$$P = x^3 \operatorname{sen} z \log_e y . y^{-\cos z}.$$

$$D_y M = D_x N\,; \qquad D_z M = D_x P\,; \qquad D_z N = D_y P.$$

Como

$$D_x f . dx = M\,dx = 3x^2 dx . y^{-\cos z}\,,$$

integrando en x:

$$f(x, y, z) = x^3 y^{-\cos z} + \varphi(y, z)\,.$$

Y, por derivaciones en z é y,

$$D_y f = N = -x^3 \cos z\, y^{-(1+\cos z)} = -x^3 \cos z\, y^{-(\cos z + 1)} + D_y \varphi;$$

$$D_z f = P = x^3 \operatorname{sen} z \log_e y . y^{-\cos z} = x^3 \log_e y^{-\cos z} . \operatorname{sen} z + D_z \varphi\,.$$

Deduciéndose de estas igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} D_y \varphi = 0 \\ D_z \varphi = 0 \end{array} \right\} \varphi = \text{const}\,.$$

Con este valor de φ:

$$f(x, y, z) = x^3 y^{-\cos z} + \text{const}\,.$$

La ecuación integral:

$$x^3 y^{-\cos} = \text{const.}$$

141. El caso de dos únicas variables (x, y), se deduce del anterior con $P_1 = z = 0$, y, por lo tanto,

$$\alpha = \beta = 0;$$

$$\gamma = D_y M_1 - D_x N_1.$$

Claro es que no hay incompatibilidad y la (**1**) se cumple siempre, así como las (**4**) y (**5**). Las (**3**) y (*a*) se hacen ilusorias, y las (*b*) y (*c*) se convierten en

$$du = \frac{D_x N_1 - D_y M_1}{M_1} dy \qquad (b');$$

$$du = \frac{D_y M_1 - D_x N_1}{N_1} dx \qquad (c').$$

Estas nos permiten, por integración corriente, determinar u cuando el coeficiente de dy sea función exclusiva de y, ó el de dx de x:

Ejemplos:

1.°

$$y\,dx - x\,dy = 0;$$

en que

$$\frac{D_y M_1 - D_x N_1}{N_1} = \frac{2}{-x}; \qquad \log_e \theta = -2 \log_e x;$$

luego:

$$\theta = x^{-2};$$

quedando la diferencial exacta:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = -d\frac{y}{x} = 0; \qquad \frac{y}{x} = \text{const.}$$

2.°

$$(by^2 - cx)dx + 2\,y\,dy = 0.$$

En ella

$$\frac{D_y M_1 - D_x N_1}{N_1} = b \, ; \qquad \theta = e^{bx} \, .$$

La ecuación exacta:

$$dx(by^2 - cx)e^{bx} + 2\, y\, dy\, e^{bx} = 0 \, .$$

Integrando:

$$f(x, y) = {}_y\!\int N dy = y^2 e^{bx} + \varphi(x) \, .$$

Para determinar la $\varphi(x)$, derivando en x:

$$D_x f = (by^2 - cx\, e^{bx} = by^2 e^{bx} + \varphi'(x) \, ;$$

y, por consiguiente,

$$\varphi'(x) dx = - cx\, dx\, e^{bx} \, ;$$

é integrando por partes:

$$\varphi(x) = - \frac{c}{b} x\, e^{bx} + \frac{c}{b^2} \int e^{bx} b\, dx = \frac{c}{b^2} e^{bx}(1 - bx) \, .$$

La ecuación integral es, según esto,

$$f(x, y) = \left(y^2 - \frac{c}{b} x + \frac{c}{b^2} \right) e^{bx} = \text{const} \, .$$

3.°

142. Sea la ecuación, *lineal* en y' é y:

$$y' + y \cdot \varphi(x) = f(x) \, ;$$

que puede escribirse

$$[y \cdot \varphi(x) - f(x)] dx + dy = 0 \, .$$

Como en ella

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = \varphi(x) \cdot y - f(x) \\ N_1 = 1 \end{array} \right\} \frac{D_y M_1 - D_x N_1}{N_1} = \varphi(x) \, ;$$

por la fórmula (c') del núm. **141**, la diferencial logarítmica de su factor integrante, será:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \varphi(x)dx; \qquad \log_e \theta = \Phi(x); \qquad \theta = e^{\Phi(x)},$$

siendo Φ la primitiva de φ, y no escribiendo la constante, puesto que no influye en la integrabilidad. Con este factor:

$$M = [y \cdot \varphi(x) - f x)]e^{\Phi(x)}$$
$$N = e^{\Phi(x)},$$

y la función constante buscada:

$$C = {}_y\!\int N dy = {}_y\!\int e^{\Phi(x)} dy = ye^{\Phi(x)} + \psi(x);$$

y, como

$$D_x C = M = [y \cdot \varphi(x) - f x)]e^{\Phi(x)} = ye^{\Phi(x)}\varphi(x) + \psi'(x):$$
$$\psi'(x) = -f(x)e^{\Phi(x)};$$

y, por consiguiente, la ecuación integral:

$$ye^{\Phi(x)} - {}_x\!\int f(x)e^{\Phi(x)} dx = C,$$

de la que

$$y = f_1(x) + Ce^{-\Phi(x)},$$

siendo

$$f_1(x) = e^{-\Phi(x)} \; {}_x\!\int f(x)e^{\Phi(x)} dx.$$

4.°

143. *Ecuación de Bernouilli:*

$$y' + y\varphi(x) = y^n f(x),$$

en la que, escrita en la forma diferencial y como sigue,

$$[y^{1-n}\varphi(x) - f(x)]dx + y^{-n}dy = 0,$$

se tiene

$$\frac{D_y M_1 - D_x N_1}{N_1} = (1-n)\,\frac{y^{-n}\varphi(x)}{y^{-n}} = (1-n)\varphi(x)$$

y, para factor integrante y derivadas parciales:

$$\theta = e^{(1-n)\Phi(x)}\,; \quad \begin{cases} M = [y^{(1-n)}\varphi(x) - f(x)]e^{(1-n)\Phi(x)}\,; \\ N = y^{-n}e^{(1-n)\Phi(x)}\,. \end{cases}$$

Integrando en y:

$$C = {}_y\!\int y^{-n}dy\, e^{(1-n)\Phi(x)} = \frac{y^{1-n}}{1-n}\, e^{(1-n)\Phi(x)} + \psi(x)\,;$$

y, por derivación, en x:

$$\psi'(x) = M - y^{1-n}\varphi(x)e^{(1-n)\Phi(x)} = -\,f(x)e^{(1-n)\Phi(x)}\,;$$

é integrando:

$$\psi(x) = -\int f(x)e^{(1-n)\Phi(x)}dx\,.$$

En el caso de ser una misma la $f(x)$ y la $\varphi(x)$, la integral de la

$$y' + y.f(x) = y^n f(x)\,,$$

es

$$C = \frac{y^{1-n}}{1-n}\, e^{(1-n)\int f(x)dx}\,.$$

144. Una vez obtenido un factor integrante θ, que haga diferencial exacta á la

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots = 0\,,$$

es decir, que tengamos

$$D_x f = M\theta\,; \quad D_y f = N\theta\,; \quad D_z f = P\theta \ldots\,;$$

también lo será el más general

$$\theta_1 = F'[f(x, y, z...) = u] . \theta ;$$

puesto que si con el θ se transforma la expresión en

$$du = df(x, y, z...) = 0 ;$$

con el θ_1 tomará la forma

$$F'(u)du = 0 ,$$

cuyo primer miembro es la diferencial exacta de la $F(u)$.

LECCIÓN 15.ª

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

DE PRIMER ORDEN

145. De lo establecido en el núm. **139** de la lección anterior, se infiere la necesidad, para la integración de una expresión diferencial, de un número de ecuaciones con las variables tal, que, al menos en principio, se puedan eliminar todas las que excedan de dos, reduciéndolas á la forma

$$M\,dx + N\,dy = 0\,;$$

siendo M y N funciones de ambas variables (x é y), con toda generalidad.

El caso más sencillo de integración que puede presentarse es el en que aparezca visible un factor integrante. Tal sucede cuando M : N es función de x exclusivamente; N : M lo es de y, ó M eslo de y, siéndolo á la par N de x. En estos casos los respectivos factores integrantes que saltan á la vista son:

N^{-1}, que la transforma en $\left[\frac{M}{N} = \varphi(x)\right]dx + dy = 0\,;$

M^{-1}, íd. íd. íd. $dx + \left[\frac{N}{M} = \psi(y)\right]dy = 0\,;$

$(MN)^{-1}$, íd. íd. íd. $\frac{dx}{N = \varphi(x)} + \frac{dy}{M = \psi(y)} = 0;$

y reduce la integración á dos ordinarias de diferenciales de una sola variable. Dícese en estos casos que se efectúa la integración por *separación de variables*.

146. *Ejemplos:*

1.°

$$dx + \sqrt{a^2 + x^2}dy = 0.$$

Con el factor

$$\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^{-1},$$

queda:

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} + dy = 0;$$

é integrada:

$$\text{Arg Sh}\,\frac{x}{a} + y = C.$$

2.°

$$\sqrt{a^2 + y^2}dx + y\,dy = 0;$$

dividiendo por $\sqrt{a^2 + y^2}$, se separan las variables:

$$dx + \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0; \qquad x + \sqrt{a^2 + y^2} = C.$$

3.°

$$y\,dx - x\,dy = 0;$$

dividiendo por xy:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0; \qquad \log x - \log y = \log C; \qquad \frac{x}{y} = C.$$

147. En muchos casos basta un cambio de variable para hacer posible la inmediata separación de éstas. Pondremos únicamente como ejemplo el de las expresiones homogéneas en x é y:

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0$$

en que el grado en x é y sea el m.° Haciendo para el cambio:

$$\frac{y}{x} = u; \qquad y = ux; \qquad dy = u\,dx + x\,du.$$

Suprimido el factor u^m, la expresión queda:

$$\varphi(1, u)dx + \psi(1, u)(u\,dx + x\,du) = 0\,;$$

ó sea

$$[\varphi(1, u) + \psi(1, u) . u]dx + x\,\psi(1, u)du = 0\,;$$

y separadas las variables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(1, u)}{\varphi(1, u) + \psi(1, u) . u}\,du = 0.$$

Aplicándolo á la especial

$$y^2dx + x\sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0\,,$$

en la que se tiene:

$$\varphi(1, u) = u^2\,,$$

$$\psi(1, u) = \sqrt{1 + u^2}\,,$$

queda, efectuada la separación:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u[u + \sqrt{1 + u^2}]}\,du = 0\,.$$

Se integrarán sus términos ya separadas; y restablecerán luego, en el segundo, las primitivas variables con $u = \frac{y}{x}$.

148. Cuando la expresión diferencial de dos variables no se encuentre en ninguno de los casos que hemos considerado, de factor integrante determinable, siempre cabe el integrarla en serie. Puede, para ello, escribirse:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)\,,$$

en la que y, por este enlace, ha de ser función de x. Si

consideramos á esta última como variable independiente y equicrescente, diferenciando

$$d\,\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx} = D_x\varphi . dx + D_y\varphi . dy = (D_x\varphi + \varphi . D_y\varphi)dx.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = D_x\varphi + \varphi . D_y\varphi = \varphi_1(x, y).$$

Análogamente deduciríamos las

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi_2(x, y);$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi_{n-1}(x, y).$$

Por la serie de Mac-Laurin, si empezamos á contar las xx cuando las yy tengan el número arbitrario C de unidades de su especie:

$$y = C + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2\,!} + \ldots$$

Como ejemplo, bien sencillo, tratemos la

$$(x + y)dx + dy = 0;$$

en la que

$$\frac{dy}{dx} = -(x+y); \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -C;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + x + y; \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -1 + C$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 - (x+y); \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = 1 - C;$$

....

valores que, llevados á la serie, dan (pág. 73):

$$y = C - x + (1 - C)\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots\right],$$

$$= C - x + (1 - C)(1 - e^{-x}) = 1 - x + (C - 1)e^{-x}.$$

Como comprobación, si despejamos el factor constante

$$(C - 1) = (x + y - 1)e^x;$$

y diferenciamos:

$$0 = (x + y - 1)e^x dx + e^x(dx + dy);$$

es decir,

$$(x + y)dx + dy = 0.$$

149. Puede suceder que al calcular estas diferenciales sucesivas nos encontremos con que se anula la primera, con los valores corrientes, simplificándose entonces mucho la integración. Así, en la ya varias veces tratada,

$$y\,dx - x\,dy = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad dy = \frac{y}{x}\,dx;$$

y diferenciando:

$$d\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{dy}{x} = dx\left(-\frac{y}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right) = 0.$$

Integrando:

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\right) = C.$$

150. Estas expresiones diferenciales de dos únicas variables (x é y), una vez precisada la equicrescente (x), pueden escribirse en ecuación finita, con la notación de Lagrange:

$$y' = \varphi(x, y);$$

ó, más generalmente,

$$\psi(x, y, y') = 0.$$

Denomínanse, así, *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.*

Si la derivada de primer orden y' entra elevada á distintas potencias enteras, se dice que es del *grado* correspondiente á la mayor. Cuando, en este caso, puede descomponerse en factores de primero:

$$[y' - \varphi_1(x, y)] \cdot [y' - \varphi_2(x, y)] \cdot [y' - \varphi_3(x, y)] \ldots = 0.$$

Se satisface, evidentemente, con cualquiera de las

$$y' = \varphi(x, y);$$

é integrando ésta,

$$y = \Phi(x, y, \text{C}); \qquad y - \Phi(x, y, \text{C}) = 0;$$

y si queremos en una sola ecuación, en x é y, comprender todas las soluciones, bastará escribir:

$$[y - \Phi_1(x, y, \text{C})] \cdot [y - \Phi_2(x, y, \text{C})] \cdot [y - \Phi_3(x, y, \text{C})] \ldots = 0,$$

integral de la propuesta.

Como en todas las ecuaciones de *primer orden* hay que efectuar *una* integración ordinaria, en la ecuación integrada tiene forzosamente que aparecer *una constante* indeterminada (C) más ó menos involucrada con las variables x é y.

Ejemplo de ecuación de *primer orden* y *segundo grado:*

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Descompuesta en factores de primer grado,

$$(y' - x)(y' - y) = 0.$$

Integrado el primer factor:

$$dy = x\,dx\,; \quad y = \frac{x^2}{2} + C\,; \quad y - \left(\frac{x^2}{2} + C\right) = 0\,.$$

Para integrar el segundo:

$$y' = y\,; \quad dy = y\,dx\,; \quad \frac{dy}{y} = dx\,; \quad y = Ce^x\,; \quad y - Ce^x = 0\,.$$

La ecuación integrada:

$$y^2 - \left(\frac{x^2}{2} + Ce^x + C\right)y + C\left(C + \frac{x^2}{2}\right)e^x = 0.$$

151. *Soluciones singulares.*—Dando valores particulares á la constante C, para cada uno de ellos obtendremos una integral *particular* de la ecuación diferencial. Puede suceder que la ordinaria, de primer orden y grado,

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se satisfaga, además, con un valor especial de y,

$$y = \varphi(x),$$

que no esté comprendido en ninguna de las integrales *particulares*. Denomínasele *solución singular* de la ecuación diferencial. Si consideramos en la (1) como variable independiente á y', diferenciando así:

$$df = D_x f . dx + D_y f . dy + D_{y'} f . dy' = 0;$$

y la (1) habrá de satisfacerse, por consiguiente, con los valores de y (si los hay), con los que

$$D_x f . dx + D_y f . dy + D_{y'} f . dy' = 0\,;$$

además de los de la *integral general.*

152. *Ejemplos:*

1.°

En la ecuación

$$y-(x+y-a)y'+xy'^2=0,$$

tenemos:

$$D_x f=(y'-1)y';$$

$$D_y f=1-y';$$

$$D_{y'} f=2xy'-(x+y-a);$$

y, con estos valores,

$$\frac{df}{dy'}=(y'-1)\frac{y'dx=dy}{dy'}-(y'-1)\frac{dy}{dy'}+2xy'-(x+y-a);$$

es decir:

$$\frac{df}{dy'}=2xy'-(x+y-a);$$

y, como de la propuesta, dejando al radical toda su extensión,

$$y'=\frac{x+y-a+\sqrt{a^2-2a(x+y)+(x-y)^2}}{2x};$$

nos queda:

$$\frac{df}{dy'}=\sqrt{a^2-2a(x+y)+(x-y)^2}.$$

El valor de y que anule este radical nos suministrará la *solución singular;* es decir, el de la ecuación de segundo grado,

$$y^2-2(x+a)y+(x-a)^2=0,$$

ó sea,

$$y=x+a+2\sqrt{ax};$$

cuya derivada es

$$y'=1+\sqrt{\frac{a}{x}};$$

valores que convierten á la ecuación diferencial en la identidad

$$x+a+2\sqrt{ax}-2(x+\sqrt{ax})\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)+$$
$$+x\left(1+\frac{a}{x}+2\sqrt{\frac{a}{x}}\right)=0.$$

Fáltanos ver que esta solución es distinta de las integrales particulares. Resuelta, en y', la ecuación diferencial

$$y'=\frac{x+y-a\pm\sqrt{(x+y-a)^2-4xy}}{2x}.$$

Este es un caso de los mencionados en el núm. **149**, en que por diferenciación total podemos comprobar que dy' ha de ser nula, y constante, por lo tanto, y'. En efecto; quitando el denominador

$$2xy'=x+y-a\pm\sqrt{(x+y-a)^2-4xy};$$

diferenciando:

$$2[x\,dy'+(y'dx=dy)]=dx+dy$$
$$+\frac{(x+y-a)(dx+dy)-2(x\,dy+y\,dx)}{\pm\sqrt{(x+y-a)^2-4xy}}.$$

Reduciendo, quitando el denominador, dejando en el primer miembro el término en dy', y llamando P á la cantidad subradical, queda:

$$\pm 2x\,dy'\sqrt{\mathrm{P}}=(x-y-a\pm\sqrt{\mathrm{P}})dx+(y-x-a\mp\sqrt{\mathrm{P}})dy;$$

y si se divide por dx y escribe $\frac{dy}{dx}=y'$,

$$\pm 2x\sqrt{\mathrm{P}}\,\frac{dy'}{dx}=x-y-a\pm\sqrt{\mathrm{P}}-2xy'+(x+y-a\mp\sqrt{\mathrm{P}})y'.$$

Poniendo en vez de y' su valor en función de x é y:

$$\pm 2x\sqrt{P}\,\frac{dy'}{dx} = x - y - a \pm \sqrt{P} - \left(x + y - a \pm \sqrt{P}\right) + \\ + \frac{4xy}{2x} = 0\,.$$

Por consiguiente:

$$\frac{dy'}{dx} = 0\,; \qquad y' = \frac{x + y - a \pm \sqrt{(x+y-a)^2 - 4xy}}{2x} = \mathrm{C}.$$

Despejando el radical, elevando al cuadrado y reduciendo:

$$y = \mathrm{C}(x + y - a) - \mathrm{C}^2 x\,; \quad (\mathrm{C} - 1)y - (\mathrm{C} - 1)\mathrm{C}x = \mathrm{C}a\,,$$

que puede escribirse, siendo c una constante tan arbitraria como la primitiva C, si se hace

$$\mathrm{C} = \frac{c - a}{c}\,,$$

en la forma más simétrica:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a - c} = 1\,;$$

integral general, en la que, con ningún valor de c, cabe la *solución singular.*

2.°

En la ecuación

$$3y^2y'^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0\,,$$

se tiene

$$\mathrm{D}_x f = -2(yy' + x)\,;$$

$$\mathrm{D}_y f = 2(3yy'^2 - xy' + 4y)\,;$$

$$\mathrm{D}_{y'} f = 2y(3yy' - x)\,;$$

$$y' = \frac{1}{3y}\left(x \pm 2\sqrt{x^2 - 3y^2}\right) \qquad (2).$$

Con estos valores:

$$D_xf.dx + D_yf.dy = dx(D_xf + y'.D_yf) = 2dx(1+y'^2)(3yy' - x)$$
$$= \pm\, 4dx(1+y'^2)\sqrt{x^2 - 3y^2}\,;$$

y, como consecuencia,

$$df = \pm\, 4\sqrt{x^2 - 3y^2}\,[(1+y'^2)dx + y\,dy'] .$$

Luego, evidentemente, la solución

$$3y^2 = x^2$$

satisface á la $df = 0$, y, por ende, á su integral particular

$$f(x,y,y') = 0 .$$

La integral general la obtendremos fácilmente de la (**2**), como homogénea que es, haciendo

$$y = x.u \begin{cases} y' = u + x\dfrac{du}{dx} \\ \sqrt{x^2 - 3y^2} = x\sqrt{1 - 3u^2} \end{cases}$$

que la transforma en

$$3u\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = 1 \pm 2\sqrt{1 - 3u^2}\,;$$

y, separadas las variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{3u\,du}{1 - 3u^2 \pm 2\sqrt{1 - 3u^2}} .$$

Si con un nuevo cambio, se hace

$$\pm\sqrt{1 - 3u^2} = z : \begin{cases} 3u^2 = 1 - z^2\,; \qquad 3u\,du = -z\,dz \\ 1 - 3u^2 = z^2\,; \end{cases}$$

y queda

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{z^2+2z} = -\frac{dz}{z+2} = -\frac{d(z+2)}{z+2}.$$

Integrando:

$$\log_e x = \log_e C - \log_e(z+2),$$

y, por lo tanto,

$$x = \frac{C}{z+2}; \quad x(z+2) = C;$$

ó, como,

$$z = \pm\sqrt{1-3u^2} = \pm\sqrt{1-3\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\pm\sqrt{x^2-3y^2}}{x},$$

tendremos:

$$\pm\sqrt{x^2-3y^2} = C - 2x;$$

y, en último término, la *integral general*

$$3(y^2+x^2) - 4Cx + C^2 = 0.$$

LECCIÓN 16.ª

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

153. Se denomina ecuación diferencial ordinaria de enésimo orden, aquella en que á las dos variables (x é y) las acompañan distintas derivadas de la y, con respecto á la *independiente* x, cuando el orden más elevado de estas derivadas es el enésimo. Por lo común, en el análisis infitesimal no hay que pasar de las variaciones de segundo orden, y, por lo tanto, en las aplicaciones no suelen presentarse ecuaciones de orden superior al segundo, y dentro de éstas danse las más sencillas, en que las derivadas entran linealmente.

154. Las de orden superior más fáciles de integrarse, son las de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x).$$

Multiplicando por dx é integrando, si se llama φ_1 á la primitiva de φ, como dx es constante:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int \varphi(x) . dx = \varphi_1(x) + C_1 .$$

Con una nueva multiplicación por dx, y la integración subsiguiente:

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2 .$$

Y así se sigue hasta llegar á la

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

En la que aparecen n constantes indeterminadas, procedentes de las n integraciones indefinidas efectuadas.

155. Cuando en la ecuación diferencial no entran más cantidades variables que dos derivadas sucesivas,

$$\varphi\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0,$$

llamando á la de menor orden u, se transforma en la

$$\varphi(u', u) = 0;$$

y se reduce la integración á la de una de primer orden de las más sencillas, si se puede despejar u'. Despejándola:

$$u' = \frac{du}{dx} = \varphi(u);$$

separando las variables

$$dx = \varphi^{-1}(u)du;$$

é integrando del modo corriente, puesto que ya están separadas las variables

$$x = \Psi(u) + C_1.$$

Despejando u:

$$u = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \Phi(x - C_1).$$

La integración se continuará como en el número anterior.

156. Como ejemplo aclaratorio de ambos números, trataremos la

$$D_{x^5}y + \sqrt{1 - (D_{x^4}y)^2} = 0.$$

En ésta:

$$D_{x^4}y = u ; \qquad D_{x^5}y = u'.$$

Y despejando en la ecuación,

$$u' = \frac{du}{dx} = -\sqrt{1-u^2}.$$

Por lo tanto,

$$dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d \operatorname{arccos} u ;$$

é integrando

$$x + C_1 = \operatorname{arccos} u ,$$

que nos da:

$$u = \frac{d^4y}{dx^4} = \cos(x + C_1).$$

Con sucesivas multiplicaciones por dx, é integraciones, iremos obteniendo:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \operatorname{sen}(x + C_1) + C_2.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos(x + C_1) + C_2x + C_3.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(x + C_1) + \frac{1}{2} C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

$$y = \cos(x + C_1) + \frac{1}{6} C_2x^3 + \frac{1}{2} C_3x^2 + C_4x + C_5.$$

157. Una de las de segundo orden más frecuentes en las aplicaciones, es la

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(y),$$

que puede escribirse, puesto que en la notación leibniciana

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$2\frac{dy}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\varphi(y)dy ;$$

é integrando, si φ_1 es la primitiva de φ,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\varphi_1(y) + C_1 .$$

Extrayendo la raíz cuadrada y separando las variables:

$$dx = (2\varphi_1(y) + C_1)^{-\frac{1}{2}} dy ;$$

y con una nueva integración,

$$x = \varphi_2(y, C_1) + C_2 .$$

Sirva, como *ejemplo*, la ecuación

$$y'' = a^2 y + b ;$$

en la que

$$\varphi_1(y) = \frac{(a^2 y + b)^2}{2a^2} ;$$

y, por consiguiente,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 y + b}{a}\right)^2 \pm C_1^2}} = \frac{d\frac{y}{C_1}}{\sqrt{\left(\frac{a^2 y + b}{aC_1}\right)^2 \pm 1}} .$$

Escribimos la constante en la forma $\pm C_1^2$, para poner de manifiesto que es susceptible de tomar todos los valores escalares, si de funciones escalares se trata.

Con el signo superior:

$$x = a^{-1} \operatorname{Arg} Sh \frac{a^2 y + b}{aC_1 = C'} + C_2 .$$

Con el inferior:

$$x = a^{-1} \operatorname{Arg} Ch \frac{a^2 y + b}{aC_1 = C'} + C_2 .$$

El *número* C' es tan indeterminado como el C_1.

158. Una ecuación que, aunque de segundo orden,

puede con un sencillísimo cambio de variable rebajarse á primero, es la

$$y'' + f_1(x) \cdot y' + f_2(x) = 0,$$

llamando

$$y' = \frac{dy}{dx} = u\,; \qquad y'' = \frac{du}{dx};$$

queda, multiplicando por dx,

$$[f_1(x) \cdot u + f_2(x)]dx + du = 0.$$

En ésta:

$$M = f_1(x) \cdot u + f_2(x)\,; \qquad D_u M = f_1(x)\,;$$
$$N = 1\,; \qquad D_x N = 0.$$

Admite, por eonsiguiente, un factor integrante función de x, cuyo logaritmo neperiano sea

$$X = \int f_1(x)dx = F_1(x), \qquad \text{sin constante.}$$

El factor será $e^{F_1(x)}$. Con él la ecuación se convertirá en

$$d\,\varphi(x,u) = D_x\varphi \cdot dx + D_u\varphi \cdot du = 0.$$

Integrando por el método de Cauchy:

$$\varphi = \int_x D_x\varphi \cdot dx = \int_x [f_1(x) \cdot u + f_2(x)]e^{F_1(x)}dx =$$
$$= u \cdot e^{F_1(x)} + \int f_2(x)e^{F_1(x)}dx + \psi(u).$$

Despejando la constante en $x[\psi(u)]$, y derivando con respecto á u,

$$D_u\psi = \left(D_u\varphi = e^{F_1(x)}\right) - e^{F_1(x)} = 0.$$

La ecuación integrada es, por consiguiente, la

$$u \cdot e^{F_1(x)} + \int dx\, f_2(x) \cdot e^{F_1(x)} = C_1\,;$$

y despejando:

$$u = \frac{dy}{dx} = -\frac{\int dx f_2(x) . e^{F_1(x)}}{e^{F_1(x)}} + C_1 e^{-F_1(x)}$$

$$= \Phi(x) + e^{-F_1(x)} . C_1 .$$

Por último:

$$y = \int \Phi(x) dx + C_1 \int e^{-F_1(x)} dx = \Psi(x) + C_1 \Psi_1(x) + C_2 .$$

159. En el caso en que las funciones f_1 y f_2 lo sean de y, tendremos la ecuación

$$y'' + f_1(y) \cdot y' + f_2(y) = 0 ,$$

que llamando $y' = u$, puesto que $y'' = \frac{y' dy'}{dy}$ puede escribirse, quitado el denominador:

$$u\, du + [f_1(y) . u + f_2(y)] dy = 0 .$$

Si, por un cambio de variable, se consigue separar las variables é integrar, obtendremos:

$$\psi(u, y, C_1) = 0 ;$$

y pudiéndose despejar u:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1) ; \qquad dx = \varphi^{-1}(y, C_1) dy .$$

Con una integración última,

$$x = \Phi(y, C_1) + C_2 .$$

Ejemplo:

$$y'' + 3yy' + y^3 = 0 ,$$

ó la expresión diferencial equivalente,

$$y' dy' + (3y' + y^2) y\, dy = 0 .$$

Si cambiamos de variable, haciendo

$$3y' + y^2 = y'.z\,, \qquad y' = \frac{y^2}{z-3} \qquad (\mathbf{1}),$$

nos queda la expresión en z é y, suprimido el factor y':

$$d\left(\frac{y^2}{z-3}\right) + zy\,dy = 0\,;$$

ó bien, efectuando operaciones:

$$2(z-3)dy - y\,dz + z(z-3)^2dy = 0\,.$$

Separando las variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{(z-3)(z^2-3z+2)} = \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)} \qquad (\mathbf{2}).$$

El primer miembro es la diferencial logarítmica de y.

Para descomponer el segundo por el método expuesto en el núm. **107**, tenemos:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{z-2} + \frac{B_3}{z-3}\,;$$

siendo los valores de estas constantes,

$$B_1 = B_3 = \frac{1}{2}, \qquad B_2 = -1\,.$$

La integral de la (**2**) es, por consiguiente,

$$\log y^2 + \log C_1 = \log(z-1) + \log(z-3) - 2\log(z-2)\,;$$

ó bien

$$C_1y^2 = \frac{(z-1)(z-3)}{(z-2)^2} = 1 - (z-2)^{-2}.$$

Despejando z:

$$z = 2 + (1 - C_1y^2)^{-\frac{1}{2}}\,;$$

y, por la (1),

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2}{(1 - C_1 y^2)^{-\frac{1}{2}} - 1} = y^2 \frac{(1 - C_1 y^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - C_1 y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(1 - C_1 y^2)^{\frac{1}{2}} + 1 - C_1 y^2}{C_1}.$$

Separando las variables:

$$dx = C_1 \frac{dy}{(1 - C_1 y^2)^{\frac{1}{2}} + (1 - C_1 y^2)} \qquad (3).$$

Con objeto de racionalizar este denominador, haremos, en un último cambio:

$$(1 - C_1 y^2)^{\frac{1}{2}} = C_1 u.y - 1;$$

y elevando el cuadrado, y reduciendo

$$- y = C_1 u^2.y - 2u; \qquad u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C_1 y^2}}{C_1 y};$$

luego

$$y = 2 \frac{u}{1 + C_1 u^2}; \qquad dy = 2 \frac{1 - C_1 u^2}{(1 + C_1 u^2)^2} du.$$

El denominador de la (3) queda, con este cambio,

$$= C_1 y(u - y) = - 2C_1 \frac{1 - C_1 u^2}{(1 + C_1 u^2)^2} u^2;$$

y, consiguientemente,

$$dx = \frac{-du}{u^2}, \qquad x = \frac{1}{u} + C_2.$$

Restableciendo la variable y, obtendremos la ecuación integral con sus dos constantes indeterminadas:

$$x = \frac{C_1 y}{1 \pm \sqrt{1 - C_1 y^2}} + C_2;$$

ó, despejando la y,

$$y = 2\frac{x - C_2}{(x - C_2)^2 + C_1}.$$

160. En la integración de la *ecuación lineal* (en y'', y' é y) de coeficientes constantes,

$$y'' + my' + ny + p = 0,$$

conviene, con un primer cambio de variable, extinguir el cuarto término. Basta, para ello, hacer

$$n\left(y + \frac{p}{n}\right) = nz, \quad \begin{cases} y' = z'; \\ y'' = z''; \end{cases}$$

cambio que la reduce á

$$z'' + mz' + nz = 0 \qquad (1).$$

En un segundo cambio introduciremos, con la nueva variable t, otra indeterminada w, que nos permita establecer libremente una ecuación de condición.

La de cambio será, tratándose de variables escalares,

$$z = w.t: \quad \begin{cases} z' = wt' + tw'; \\ z'' = wt'' + 2w't' + tw''; \end{cases}$$

que transforma la ecuación (1) en

$$wt'' + (mw + 2w')t' + (w'' + mw' + nw)t = 0 \qquad (2).$$

Precisando ahora la variable arbitraria w, con la condición

$$mw + 2w' = 0; \qquad \frac{w'}{w} = -\frac{m}{2};$$

que multiplicando por dx, é integrando luego, nos da:

$$\frac{dw}{w} = -\frac{m}{2}\,dx; \qquad w = Ae^{-\frac{m}{2}x};$$

llamando A á la constante de logaritmo indeterminado.

Como consecuencias,

$$w' = -\frac{m}{2}\,\mathrm{A}e^{-\frac{m}{2}x}; \qquad w'' = \frac{m^2}{4}\,\mathrm{A}e^{-\frac{m}{2}x};$$

y la (**2**) toma la forma

$$\mathrm{A}e^{-\frac{m}{2}x}\left[t'' + \left(n - \frac{m^2}{4}\right)t\right] = 0;$$

es decir:

$$t'' = \frac{t'dt'}{dt} = \left(\frac{m^2}{4} - n\right)t.$$

Separando las variables y multiplicando por 2,

$$2t'dt' = \left(\frac{m^2}{4} - n\right).2t\,dt.$$

Integrando:

$$t'^2 = \left(\frac{m^2}{4} - n\right)t^2 + \mathrm{B}.$$

Luego:

$$\frac{dt}{dx} = t' = \sqrt{\mathrm{B} + \left(\frac{m^2}{4} - n\right)t^2}.$$

Con las variables separadas,

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{B} + \left(\frac{m^2}{4} - n\right)t^2}} \qquad (\mathbf{3}).$$

Para efectuar la integración del segundo miembro, hay que tratar separadamente los tres casos, en que $4n - m^2$ sea menor, igual ó mayor que cero.

1.er CASO. $4n - m^2 < 0$. En éste podemos escribir la (**3**), llamando $m^2 - 4n = 4a^2$, y $c = \mathrm{B}^{\frac{1}{2}}$,

$$dx = a^{-1}\frac{d\,\frac{at}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}.$$

Integrando:

$$x + c' = a^{-1} \operatorname{Arg} Sh \left(\frac{at}{c}\right); \qquad t = \frac{c}{a} Sh[(x + c')a],$$

ó representando á la constante *arbitraria* $c'.a$ con c'':

$$t = \frac{c}{2a}\left[e^{ax+c''} - e^{-ax-c''}\right].$$

Teníamos:

$$z = wt; \qquad w = Ae^{-\frac{m}{2}x};$$

luego:

$$z = \frac{Ac}{2a}\left[e^{c''}.e^{\left(a-\frac{m}{2}\right)x} - e^{-c''}.e^{-\left(a-\frac{m}{2}\right)x}\right];$$

ó bien, si llamamos r_1 y r_2 á las raíces de la ecuación $z^2 + mz + n = 0$, y á las constantes *arbitrarias*

$$\frac{Ac}{2a}e^{c''} = C_1, \qquad \frac{Ac}{2a}e^{-c''} = C_2,$$

las ecuaciones finales serán:

$$z = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x};$$

$$y = z - \frac{p}{n}.$$

2.° CASO. $4n - m^2 = 0$. La (**3**) toma la forma

$$dx = c^{-1}.dt; \qquad x = c^{-1}.t + c'; \qquad t = c(x - c'),$$

y, por consiguiente,

$$z = (Ac\,x - Acc')e^{-\frac{m}{2}x} = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{m}{2}x}.$$

3.er CASO. $4n - m^2 > 0$. La (**3**) es entonces, llamando $4n - m^2 = 4a^2$:

$$dx = a^{-1}\frac{d\,\frac{at}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{at}{c}\right)^2}}.$$

Integrando y multiplicando por a:

$$a(x+c') = \left\{ \begin{array}{l} \text{arcsen} \\ -\text{arccos} \end{array} \right\} \left(\frac{at}{c} \right).$$

Despejando la t:

$$t = \frac{c}{a} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right\} [a(x+c')] \, ;$$

y, por último,

$$z = \frac{Ac}{a} e^{-\frac{m}{2}x} . \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right\} \left(x\sqrt{n - \frac{m^2}{4}} + ac' \right)$$

$$= C_1 e^{-\frac{m}{2}x} . \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right\} \left(x\sqrt{n - \frac{m^2}{4}} + C_2 \right).$$

161. Cuando en la ecuación lineal de segundo orden, en vez de ser constantes los coeficientes, son funciones de x,

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0 \, ,$$

se puede, con el cambio de variable,

$$y = e^z \, , \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = e^z . z' \, , \\ y'' = e^z . (z'' + z'^2) \, , \end{array} \right.$$

reducirla á la expresión diferencial en x y z',

$$dz' + [z'^2 + X_1 z' + X_2] dx = 0 \, ,$$

que, si con un nuevo cambio se consigue separar las variables, nos dará, integrada, una ecuación de la forma

$$f(x, z', C_1) = 0 \, ;$$

y si de ésta se puede despejar z',

$$z' = \frac{dz}{dx} = \varphi(x, C_1) \, ;$$

$$z = \int \varphi(x, C_1) dx = \Phi_1(x, C_1) + c_2 \, ,$$

y, por lo tanto,

$$y = C_2 e^{\Phi_1(x, C_1)}.$$

Ejemplo:

$$y'' + 2xy' + x^2 = 0.$$

Con el cambio, queda:

$$dz' + (x + z')^2 dx = 0.$$

Si, en otro, hacemos

$$x + z' = u; \quad z' = u - x; \quad dz' = du - dx;$$

se reduce á

$$du + (u^2 - 1)dx = 0; \quad dx = \frac{du}{1 - u^2};$$

é integrando,

$$x + C_1 = \text{Arg Th}\, u; \quad u = Th(x + C_1);$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dz}{dx} = z' = u - x = Th(x + C_1) - x.$$

Separando las variables

$$dz = Th(x + C_1)d(x + C_1) - x\, dx;$$

é integrando:

$$(z = \log_e y) = \log_e Ch(x + C_1) - \frac{x^2}{2} + \log_e C_2.$$

Pasando á los números:

$$y = C_2 Ch(x + C_1) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

LECCIÓN 17.ª

ECUACIONES SIMULTÁNEAS Y DE DERIVADAS PARCIALES

162. *Ecuaciones simultáneas.*—Cuando en un sistema de n ecuaciones, distintas y compatibles, con $n+1$ variables $(x, y, z, \dots t)$, se considera como independiente la t, se las deriva á todas ellas, ó á algunas nada más, un número de veces, que para las más veces derivada sea el m, y se transforma luego el sistema en otro cualquiera equivalente, de los infinitos posibles, se llegará á uno de n ecuaciones, entre las primitivas variables y las m derivadas de las dependientes $(x, y, \dots z)$. Denomínase, un sistema de esta naturaleza, de *ecuaciones simultáneas de m.º orden.*

El problema de integración consiste en hallar las n funciones de t, que corresponden como valores de las n variables dependientes $(x, y, \dots z)$. En las n ecuaciones primitivas es, por lo común, salvo los contadísimos casos que por el Álgebra conocemos, impracticable la resolución; á nada conduce el fingir posible, con toda generalidad, la integración de las ecuaciones simultáneas; eslo únicamente en casos muy sencillos.

Como procedimiento general, puede darse el completar, por derivaciones de las simultáneas que hay que integrar, un número de ecuaciones (entre las variables dependientes,

la independiente t, las primitivas derivadas y las nuevamente introducidas por derivación) tal que pueda obtenerse un sistema en que en cada una de ellas no entre más que una de las variables dependientes de la t y sus distintas derivadas, con relación á ésta. Su integración, cuando sea posible, nos dará la solución del problema.

163. Como ejemplo, trataremos dos sencillas de primer orden:

1.°
$$D_t x = y\,;$$
$$D_t y = x\,;$$

derivando la primera y teniendo en cuenta la segunda,

$$D_{t^2} x = D_t y = x\,;$$

que puede escribirse:

$$\frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = x\,; \qquad 2\,\frac{dx}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2x dx\,;$$

é integrando,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x^2 \pm c^2\,; \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 \pm c^2}\,.$$

Separando las variables:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm c^2}} = d \operatorname{Arg} \begin{Bmatrix} Sh \\ Ch \end{Bmatrix} \left(\frac{x}{c}\right);$$

y por nueva integración,

$$t + c' = \operatorname{Arg} \begin{Bmatrix} Sh \\ Ch \end{Bmatrix} \left(\frac{x}{c}\right).$$

Pasando á la inversa:

$$x = c.\begin{Bmatrix} Sh \\ Ch \end{Bmatrix} (t + c') = \frac{c}{2}\, e^{c'}.e^{t} \mp \frac{c}{2}\, e^{-c'}.e^{-t}\,;$$

ó sea

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t};$$

y, como consecuencia,

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

2.º

164. Las *lineales* de coeficientes constantes, con notación de Lagrange y variable independiente t:

$$x' + ax + by = 0 \qquad (1);$$
$$y' + a_1 x + b_1 y = 0; \qquad (2).$$

Por derivación, con respecto á t, de la (**1**):

$$x'' + ax' + by' = 0, \qquad (3).$$

Si á esta (**3**) le sumamos la (**1**) multiplicada por A y la (**2**) por B, obtendremos la

$$x'' + (a + A)x' + (aA + a_1 B)x + (b + B)y' + (bA + b_1 B)y = 0 \quad (4).$$

Precisando ahora las indeterminadas A y B, de modo que se anulen los coeficientes de y' é y en la (**4**); es decir, haciendo

$$A = b_1, \quad y \quad B = -b,$$

se reduce esa (**4**) á la lineal en x'', x' y x:

$$x'' + (a + b_1)x' + (ab_1 - a_1 b)x = 0.$$

Según que $(a - b_1)^2 + 4a_1 b$ sea mayor, igual ó menor que cero, obtendremos para x una de las tres funciones de t del núm. **166**, con las dos constantes indeterminadas,

$$x = f(t, C_1, C_2).$$

Y, por la (**1**),

$$y = -\frac{a}{b} f(t, C_1, C_2) - \frac{1}{b} f'_t(t, C_1, C_2).$$

En las de coeficientes numéricos

$$D_t x + 4x - 2y = 0\,,$$

$$D_t y + 2x + 8y = 0\,,$$

se llega á la

$$x'' + 12x' + 36x = 0\,.$$

Y, por consiguiente,

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-6t}\,;$$

$$y = \left(\frac{C_1}{2} - C_2 - C_1 t\right)e^{-6t}.$$

165. *Ecuaciones de derivadas parciales.*—Las más sencillas, é irresolubles, sin embargo, en la mayoría de los casos, son las de la forma

$$\varphi_1 D_x z + \varphi_2 D_y z + \varphi_3 = 0 \qquad \textbf{(0)};$$

pues siendo con toda generalidad los coeficientes φ_1, φ_2 y φ_3 funciones cualesquiera de las tres variables x, y, z, no hay modo hábil de determinar una

$$z = f(x,y)$$

que la satisfaga.

Puede, sin embargo, resolverse en algunos casos particulares. Supongamos primeramente $\varphi_3 = 0$:

$$\varphi_1 D_x z + \varphi_2 D_y z = 0 \qquad \textbf{(1)}.$$

Siendo F una característica arbitraria, diferenciemos la

$$F[x, y, z = f(x,y)] = 0 \qquad \textbf{(2)};$$

obteniendo

$$(D_x F dx + D_y F dy) + D_z F(D_x z\, dx + D_y z\, dy) = 0 \qquad \textbf{(3)}.$$

Como la incrementación de las variables independientes

es arbitraria, sin más limitación que la de efectuarse dentro de un mismo orden infinitesimal, fijemos la condición

$$\frac{dx}{\varphi_1} = \frac{dy}{\varphi_2} \quad (4); \qquad \varphi_2 dx - \varphi_1 dy = 0 \quad (5).$$

Si esta expresión diferencial puede integrarse (*) y despejamos en la ecuación integral la constante

$$C = f_1(x,y),$$

y transformamos la (**2**) en

$$F[C = f_1(x,y), z] = 0;$$

por la constancia del valor de $f_1(x, y) = C$, se anula la cantidad comprendida en el primer paréntesis de la (**3**), y el segundo, por la igualdad (**4**), toma la forma

$$D_z F \frac{dx}{\varphi_1} (D_x z . \varphi_1 + D_y z . \varphi_2) = 0,$$

ó sea la ecuación de las derivadas, propuesta

$$D_x z . \varphi_1 + D_y z . \varphi_2 = 0;$$

luego la forma más general de satisfacer ésta, por la indeterminación de la característica F, es la

$$F[f_1(x,y), z] = 0;$$

ó, despejando z, y siendo F_1 tan arbitraria como F:

$$z = F_1[f_1(x,y)].$$

Ejemplo numérico:

$$2D_x z = 3D_y z.$$

(*) Acudiendo al desarrollo en serie, siempre.

Expresión diferencial auxiliar:

$$3dx + 2y = 0\,; \qquad f_1(x,y) = 3x + 2y\,;$$

integral general:

$$z = F_1(3x + 2y)\,; \left\{ \begin{array}{l} D_x z = F_1' \,.\, 3; \\ D_y z = F_1' \,.\, 2\,. \end{array} \right.$$

166. Consideremos ahora la ecuación con segundo miembro

$$\varphi_1 D_x z + \varphi_2 D_y z = \varphi_3 \qquad (\mathbf{1}),$$

en sus casos integrables. Si podemos ligar el incremento (dz) de la variable *dependiente* con los de las dos independientes, por medio de las dos ecuaciones

$$\frac{dx}{\varphi_1} = \frac{dy}{\varphi_2} = \frac{dz}{\varphi_3} \qquad (\mathbf{2}),$$

llevando los valores éstos de las φ_1, φ_2 y φ_3 á la (**1**), la convertirían en la identidad

$$D_x z . dx + D_y z . dy = dz.$$

Es decir, que toda ecuación consecuencia de las (**2**), de ser éstas posibles, satisface á la (**1**) propuesta, y puede, por consiguiente, considerarse como una *integral particular.* Como dos de las tres variables son independientes, una de las igualdades (**2**) siempre está en nuestra mano el señalarla, y nos bastará con que una expresión que se deduzca de las (**2**) sea integrable, para inferir que es lícita la segunda ecuación establecida. Siendo λ un factor indeterminado, será suficiente, por ejemplo, que haya valores de éste susceptibles de hacer integrable la

$$\frac{dz}{\varphi_3} = \frac{dx + \lambda dy}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}\,; \quad dz = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}\,dx + \frac{\lambda\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}\,dy \qquad (\mathbf{3}.)$$

É integrada, las

$$z = \psi(x,y) + C\,,$$

que deduzcamos, habrán de satisfacer á la propuesta.

En efecto; para poderse integrar dz, ó lo que es lo mismo, para la *posibilidad* de la (**3**), habrá de tenerse:

$$\left.\begin{aligned} D_x z &= \frac{\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}, \\ D_y z &= \frac{\lambda\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{4}).$$

valores que satisfacen idénticamente á la (**1**), puesto que la reducen á

$$\frac{(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2} = \varphi_3.$$

Como

$$z - \psi(x,y) = \text{const},$$

siendo f una característica completamente arbitraria,

$$f[z - \psi(x,y)] = \text{const}.$$

Y ésta será la integral *más general* de la propuesta.

167. Tratemos, *como ejemplo*, la ecuación

$$aD_x z + bD_y z = c.$$

La auxiliar que habrá que integrar será la

$$dz = \frac{c}{a + b\lambda}\,dx + \frac{c\lambda}{a + b\lambda}\,dy\ ; \quad \left\{\begin{aligned} D_x z &= c(a + b\lambda)^{-1}; \\ D_y z &= c\lambda(a + b\lambda)^{-1}. \end{aligned}\right.$$

Y la condición de *posibilidad:*

$$D_y(a + b\lambda)^{-1} = D_x[\lambda(a + b\lambda)^{-1}];$$

ó sea, efectuando las derivaciones indicadas, y reduciendo,

$$aD_x\lambda + bD_y\lambda = 0;$$

que, integrada como se expuso en el núm. **165**, da

$$\lambda = F(bx - ay).$$

Tomando la inversa:

$$bx - ay = F_1(\lambda);$$

diferenciando:

$$b\,dx - a\,dy = F_1'(\lambda)d\lambda;$$

y de aquí,

$$dy = \frac{b}{a}\,dx - \frac{F_1'(\lambda)d\lambda}{a}.$$

Ahora bien:

$$dz = [D_x z = c(a + b\lambda)^{-1}]dx + [D_y z = c\lambda(a + b\lambda)^{-1}]dy;$$

y si eliminamos *dy*:

$$dz = \frac{c}{a}\,dx - \frac{c\lambda}{a}\,\frac{F_1'(\lambda)d\lambda}{a + b\lambda};$$

é integrando,

$$z = \frac{c}{a}\,x - F_2(\lambda) + C'.$$

La *integral general* de la ecuación del ejemplo será, por lo tanto,

$$az - cx + aF_2(\lambda) = C;$$

ó, despejando la variable determinada:

$$az - cx = f_1(\lambda) = f_1(ay - bx);$$

siendo esta característica f_1 tan indeterminada ó arbitraria como las anteriores.

168. La deducida (**3**) del número anterior es utilizable únicamente en el caso de ser φ_3 independiente de z, á no ser que podamos tomar un factor λ tal que lo sean

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_1 + \lambda\varphi_2}, \quad \frac{\lambda\varphi_3}{\varphi_1 + \varphi_2}.$$

Si φ_3 es función exclusivamente de z, podrá tomarse una variable auxiliar

$$u = \int_z \frac{dz}{\varphi_3},$$

siendo entonces la (**3**)

$$du = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)^{-1}\, dx + \lambda(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)^{-1}\, dy.$$

169. La integración de esa exige todavía que φ_1 y φ_2 sean funciones en que no entre la variable z. Sin ello es todavía posible deducir de las igualdades

$$\frac{dx}{\varphi_1} = \frac{dy}{\varphi_2} = \frac{dz}{\varphi_3},$$

una expresión integrable, que, como hemos puesto de manifiesto, es la única *condición necesaria* para su *licitud*.

Ejemplos:

1.° En la

$$x\mathrm{D}_x z + y\mathrm{D}_y z = z;$$

de

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

se puede deducir la

$$\left(\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z} = d\log_e \frac{x}{z}\right) = \left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = d\log_e \frac{y}{z}\right);$$

é integrando:

$$\log_e \frac{x}{z} = \log_e \frac{y}{z} + \log_e \mathrm{C} = \log_e\left(\mathrm{C}\,\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{x}{z} = \mathrm{C}\,\frac{y}{x}; \quad \mathrm{C} = \frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{z}};$$

Luego la integral más general será la

$$f(\mathrm{C}) = f\left(\frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{z}}\right) = \text{const},$$

ó bien

$$\frac{x}{z} = f_1\left(\frac{y}{z}\right).$$

2.° Sea la ecuación

$$(bz - cy)D_x z + (cx - az)D_y z = ay - bx;$$

y, las condiciones impuestas,

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx}.$$

De éstas, podemos deducir la igualdad

$$\frac{a\,dx + b\,dy}{c(bx - ay)} = \frac{dz}{ay - bx};$$

ó sea:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \qquad (\mathbf{1}).$$

Y también la

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{z(bx - ay)} = \frac{dz}{ay - bx},$$

ó

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0 \qquad (\mathbf{2}).$$

La integración de la (**1**) nos da:

$$ax + by + cz = C_1.$$

La de la (**2**):

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Y como

$$f_1(C_1, C_2) = \text{const};$$

la manera más lata de comprender ambas soluciones, es la

$$f_1[(ax + by + cz), (x^2 + y^2 + z^2)] = C;$$

ó

$$ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2),$$

que podrá tomarse como *integral general.*

170. Conforme se va elevando el orden de las derivadas parciales, va aumentando el número de las características funcionales arbitrarias, como claramente se verá con los dos ejemplos sencillos de ecuaciones de segundo orden que siguen:

1.°

$$D_{xy}z = a,$$

que puede escribirse llamando, según es costumbre, q á la $D_y z$,

$$D_x q = a.$$

Multiplicando por dx, é integrando con relación á esta variable x:

$$\int_x D_x q . dx = \int_x a \, dx;$$

$$(D_y z = q) = ax + \varphi'(y).$$

Multiplicando ahora por la diferencial de y, é integrando con respecto á y:

$$z = ax\,y + \varphi(y) + \psi(x).$$

2.°

Sea la ecuación

$$a^2 D_{x^2} z - 2ab D_{xy} z + b^2 D_{y^2} z = 0,$$

que si $D_x z = p$, $D_y z = q$, puede escribirse, puesto que

$$D_{xy} z = D_y p = D_x q$$

$$a D_x (ap - bq) - b D_y (ap - bq) = 0;$$

ó llamando $ap - bq = u$,

$$a D_x u - b D_y u = 0;$$

cuya integral es (núm. **165**):

$$u = f(ay + bx);$$

es decir, poniendo en vez de u su valor,

$$aD_x z - bD_y z = f(ay + bx);$$

y como $(ay + bx)$ es tan constante como la c del ejemplo del núm. **167**, nos bastará en la integral general de aquél cambiar el signo de b y reemplazar la c con $f(ay + bx)$. Obteniéndose así, como integral general de la de segundo orden propuesta,

$$az - x\,f(ay + bx) = f_1(ay + bx);$$

ó despejando z,

$$z = x\,f_2(ay + bx) + f_3(ay + bx).$$



SEGUNDA PARTE

APLICACIONES

SUBDIVISIÓN

Las *Aplicaciones* las subdividiremos en dos grupos ó clases, que constituirán dos libros distintos. Incluiremos en el III las geométricas usuales, para completar los puntos de ambas Geometrías que han quedado sin ultimar en los estudios preparatorios, y reuniremos en el libro IV las que, aunque puramente geométricas, tienen íntima conexión con la Mecánica, y pueden, por esto, considerarse como sus *prolegómenos geométricos.*

LIBRO TERCERO

GEOMETRIA

LECCIÓN 18.ª

LÍNEAS CURVAS

171. *Plano osculador.*—En la Geometría analítica cartesiana se da una curva, con toda generalidad, por las ecuaciones de dos superficies cualesquiera que la comprendan. Las más cómodas, por lo común, suelen ser dos cilíndricas proyectantes de la curva, y entonces queda ésta precisada por las ecuaciones de dos proyecciones suyas en dos de los planos. Tomando como variable independiente la z, por las

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(z)\,, \\ y=\psi(z)\,, \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{1}).$$

y la variable equicrescente es en este caso la z; la *unidad diferencial*, por lo tanto, dz.

Consideremos tres puntos, N, P, Q, consecutivos de la curva, á que correspondan los valores de z:

al N	z,
» P	$z+dz$,
» Q	$z+2dz$;

y hagamos pasar por estos tres puntos, ó lo que es lo mismo, por las cuerdas infinitésimas PN y PQ, un plano. A este plano lo denominaremos *osculador* de la curva en el pun-

to P. Las otras dos coordenadas de los puntos N, P y Q, serán por las (**1**):

x de N $\varphi(z)$;
» P $\varphi(z) + d[\varphi(z)] = \varphi(z) + \varphi'(z)dz$;
» Q $\varphi(z) + 2\varphi'(z)dz + \varphi''(z)dz^2$.

y de N $\psi(z)$;
» P $\psi(z) + \psi'(z)dz$;
» Q $\psi(z) + 2\psi'(z)dz + \psi''(z)dz^2$.

La ecuación del plano osculador, por pasar por el punto N, será:

$$A\varphi(z) + B\psi(z) + Cz + D = 0 \qquad (\mathbf{2});$$

por contener á los N y P,

$$A\varphi'(z)dz + B\psi'(z)dz + Cdz = 0 \qquad (\mathbf{3});$$

ó sea

$$A\varphi'(z) + B\psi'(z) + C = 0 \qquad (\mathbf{4});$$

y como pasa por los P y Q,

$$A[\varphi'(z)dz + \varphi''(z)dz^2] + B[\psi'(z)dz + \psi''(z)dz^2] + Cdz = 0 \quad (\mathbf{5}).$$

Restando de esta (**5**) la (**3**),

$$A\varphi''(z)dz^2 + B\psi''(z)dz^2 = 0,$$

ó, lo que es lo mismo,

$$A\varphi''(z) + B\psi''(z) = 0;$$

y de aquí,

$$\frac{B}{A} = -\frac{\varphi''}{\psi''};$$

que, con la (**4**), nos da:

$$\frac{C}{A} = \frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{\psi''}.$$

Ambas relaciones y la (**2**):

$$\frac{D}{A}=\frac{\psi\varphi''-\varphi\psi''}{\psi''}+\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{\psi''}z.$$

La ecuación del *plano osculador* en el punto P, llamando x_0, y_0, z_0 á las coordenadas de este punto, que numéricamente en nada difieren de las x, y, z del punto N, habrá de ser, según esto:

$$\psi''(z_0)[x-x_0]-\varphi''(z_0)[y-y_0]+[\psi'(z_0)\varphi''(z_0)-\varphi'(z_0)\psi''(z_0)][z-z_0]=0.$$

Los cosenos (a_1, b_1, c_1) de los ángulos que forma con los tres planos, ó su normal con los tres ejes, quedarán precisados con las igualdades

$$\frac{a_1}{\psi''}=-\frac{b_1}{\varphi''}=\frac{c_1}{\psi'\varphi''-\varphi'\psi''} \qquad (6).$$

172. *Círculo osculador.*—Recibe esta denominación, respecto al punto P, el determinado por los mismos tres puntos consecutivos y situado, por lo tanto, en el plano osculador. Su centro se hallará en el punto de intersección de las perpendiculares levantadas en los puntos medios de las cuerdas NP y PQ. A las longitudes de estas cuerdas las llamaremos l_1 y l_2; á sus ángulos con los ejes $\lambda_1\mu_1\nu_1$, $\lambda_2\mu_2\nu_2$; al que forma la NP con la PQ, θ. A la longitud de la NQ, L. Al radio del círculo, R.

1.ª Siendo O el centro, en el triángulo isósceles ONQ, se tiene:

$$\frac{L}{2}=R\operatorname{sen}\theta; \qquad R=\frac{L}{2\operatorname{sen}\theta}.$$

En el triángulo NPQ,

$$L^2=l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos\theta;$$

y, por ser θ un infinitésimo angular:

$$\cos\theta=1-\varepsilon^2;$$

y, consiguientemente,

$$L^2 = (l_1 + l_2)^2 - N\varepsilon^4.$$

No teniendo que medir más que los de primer orden,

$$L = l_1 + l_2;$$

y como, á su vez, la diferencia entre l_2 y l_1 es también de segundo,

$$L = 2l_1; \quad R = \frac{l_1}{\text{sen}\,\theta} \tag{7}$$

Para determinar *sen* θ, puesto que las proyecciones de la cuerda son las cuerdas de las proyecciones, tenemos en la primera:

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos\lambda_1 &= \varphi' dz, \\ l_1 \cos\mu_1 &= \psi' dz, \\ l_1 \cos\nu_1 &= dz; \end{aligned}\right\} l_1 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dz = m\, dz,$$

y en la segunda cuerda:

$$\left.\begin{aligned} l_2 \cos\lambda_2 &= \varphi' dz + \varphi'' dz^2, \\ l_2 \cos\mu_2 &= \psi' dz + \psi'' dz^2, \\ l_2 \cos\nu_2 &= dz; \end{aligned}\right\} l_2 = n\, dz,$$

llamando, por abreviar,

$$[\varphi'^2 + \psi'^2 + 1 + 2(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')dz + (\varphi''^2 + \psi''^2)dz^2]^{\frac{1}{2}} = n.$$

Por consiguiente,

$$\cos\lambda_1 = \frac{\varphi'}{m}; \quad \cos\mu_1 = \frac{\psi'}{m}; \quad \cos\nu_1 = \frac{1}{m};$$

$$\cos\lambda_2 = \frac{\varphi' + \varphi'' dz}{n}; \quad \cos\mu_2 = \frac{\psi' + \psi'' dz}{n}; \quad \cos\nu_2 = \frac{1}{n};$$

y con estos cosenos, el del ángulo de las dos cuerdas valdrá:

$$\cos\theta = \frac{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1 + (\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')dz}{mn};$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' + \psi'\varphi'')^2}{m^2n^2}\,dz^2.$$

No *midiéndose* más que los infinitésimos de primer orden,

$$\operatorname{sen}\theta = \theta = \frac{[\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2]^{\frac{1}{2}}}{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}\,dz.$$

Llevando este valor y el de $l_1 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}dz$ á la (**7**), la longitud del radio del círculo osculador es:

$$R = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{[\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

La situación del centro queda precisada del todo, en el plano osculador, por hallarse en la perpendicular á la cuerda de coeficientes angulares φ' y ψ' por un punto de ésta cuyas coordenadas, con toda exactitud numérica, son las del punto de osculación.

173. *Angulo de dos planos osculadores consecutivos.*— Llamando a_2, b_2, c_2 á los cosenos de los ángulos del inmediato posterior al de las (**6**) del núm. **171**, como el punto Q procede del P por una incrementación dz de la variable independiente

$$a_2 = a_1 + da_1; \quad b_2 = b_1 + db_1; \quad c_2 = c_1 + dc_1.$$

Si el ángulo de ambos planos lo llamamos τ:

$$\cos\tau = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_1da_1 + b_1db_1 + c_1dc_1.$$

Tenemos, además,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$

$$(a_1 + da_1)^2 + (b_1 + db_1)^2 + (c_1 + dc_1)^2 = 1:$$

$$2(a_1 da_1 + b_1 db_1 + c_1 dc_1) = -(da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2);$$

y, con estos valores,

$$\cos \tau = 1 - \frac{1}{2}(da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2);$$

y, por lo tanto, no apreciando más que el primer orden:

$$\operatorname{sen} \tau = \tau = \sqrt{da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2} = dz\sqrt{(D_z a_1)^2 + (D_z b_1)^2 + (D_z c_1)^2}.$$

De las (**6**) del núm. **171** deduciríamos los valores de $D_z a_1$, $D_z b_1$, $D_z c_1$, llegando á una expresión de la forma

$$\tau = f(\varphi'\varphi''\varphi'''\psi'\psi''\psi''')dz.$$

174. *Elemento de curva.*—La distancia del punto P al p, medio de la cuerda NQ, habrá de ser, por los valores de las coordenadas de los P, N y Q:

$$Pp = \frac{dz^2}{2}\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2};$$

es decir, que mientras no haya que medir los infinitésimos de segundo orden, no se comete error alguno numérico al suponer confundidos los puntos P y p (si φ'' y ψ'' tienen valores finitos) y puede tomarse como longitud de la curva desde N hasta Q la L, ó, lo que es lo mismo, la l_1 como longitud del arco NP; con la notación corriente

$$ds = NP = l_1 = dz\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}.$$

175. *Curvaturas.*—Siendo θ el ángulo, que se denomina de *contingencia,* formado por dos cuerdas consecutivas, y con este valor de *ds*, el del radio del círculo osculador puede escribirse

$$R = \frac{ds}{\theta}.$$

Conforme se va encorvando la línea, por su flexión en el plano osculador, se aleja de la dirección rectilínea (á que corresponde un radio infinito y una curvatura nula), y disminuye el valor de R para un desarrollo igual (*ds*) de curva elemental. La mejor medida de la curvatura ésta, en el plano osculador, que se denomina *primera curvatura,* es el recíproco de este radio; y así se viene tomando desde Euler:

$$1.^{\text{a}} \text{ curvatura} = R^{-1} = \frac{\theta}{ds}.$$

La mayor parte de los autores llama á esta primera curvatura *flexión;* los ingleses dan esta denominación á la *segunda curvatura* originada por el giro angular τ del plano osculador; lo más común es, á la curvatura segunda y á su ángulo, denominarlos *de torsión.* Se mide como la primera, relacionándola con la longitud del elemento:

$$2.^{\text{a}} \text{ curvatura} = \frac{\tau}{ds}.$$

Al radio R, *de primera curvatura,* ó sencillamente *de curvatura.* Aunque con impropiedad, al recíproco de $\tau : ds$ se le suele calificar de *radio* de segunda curvatura.

176. *Tangentes, normales y plano normal.*—Para todos los efectos numéricos en que no haya que tomar unidades de orden superior al primero, no se sigue error alguno de considerar á la tangente como prolongación de la cuerda infinitésima, ni de tomar como coeficientes angulares de la

tangente los φ' y ψ' de la cuerda (*). Representando con las mayúsculas las coordenadas de la tangente, y con las minúsculas las de la curva en el elemento del contacto:

$$X - x = \varphi'(z)(Z - z) ;$$
$$Y - y = \psi'(z)(Z - z) .$$

Sus cosenos directores, los mismos de la cuerda:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda_1 &= \frac{dx}{ds} = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}} ; \\ \cos\mu_1 &= \frac{dy}{ds} = \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}} ; \\ \cos\nu_1 &= \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}} . \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Las perpendiculares á la tangente, en su punto de contacto, constituyen las normales á la curva. Todas ellas determinan el *plano normal* en ese punto. La ecuación de este plano queda definida por la condición de perpendicularidad á la tangente de coeficientes φ' y ψ'. Es la

$$(X - x)\varphi' + (Y - y)\psi' + (Z - z) = 0 .$$

177. *Normal principal.*—La normal situada en el plano osculador recibe el nombre de *normal principal*. Se determina por la intersección de ambos planos, cuyas ecuaciones son:

$$(X - x)\varphi' + (Y - y)\psi' + (Z - z) = 0 ;$$
$$(X - x)\psi'' - (Y - y)\varphi'' + (Z - z)(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'') = 0 .$$

(*) No se olvide que hemos llamado

$$\left[\frac{\Delta x}{\Delta z}\right]_{\frac{\Delta z}{L}=0} = \varphi' ; \quad \text{no á la} \left[\frac{\Delta x}{\Delta z}\right]_{\Delta z=0} ;$$

siguiendo el criterio geométrico de Leibnitz, Newton, Euler, etc., no el limitado posteriormente con el *algebrismo* de Lagrange.

Las de su intersección, por consiguiente:

$$X - x = \frac{\varphi'\psi'\varphi'' - (1 + \psi'^2)\varphi''}{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}(Z - z);$$

$$Y - y = \frac{\psi'\varphi'\psi'' - (1 + \varphi'^2)\psi''}{\psi'\psi'' + \varphi'\varphi''}(Z - z).$$

Si llamamos α, β, γ á los ángulos que esta *normal* principal forma con los ejes, por estas ecuaciones habremos de tener:

$$\frac{\cos\alpha}{\varphi'' - \psi'(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')} = \frac{\cos\beta}{\psi'' - \varphi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')} = \frac{-\cos\gamma}{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''} \quad (b).$$

Es más cómodo, por la simetría de los resultados, tomar como *unidad diferencial*, en vez de la dz, la ds (longitud de la cuerda infinitésima ó del elemento de arco). Diferenciando las (a) del número anterior, supuesta ya la *constancia* de ds y la variabilidad de dz,

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2x}{ds} = \frac{\varphi'' - \psi'(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\, dz:$$

y poniendo en vez de dz su valor

$$dz = \frac{ds}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}};$$

y dividiendo por ds:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\varphi'' - \psi'(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^2}.$$

Análogamente:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\psi'' - \varphi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^2}.$$

Además:

$$\left[d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{d^2z}{ds}\right]=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dz=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+1)^2}\,ds$$

ó sea

$$\frac{d^2z}{ds^2}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+1)^2}.$$

Con estos valores, las (b) pueden escribirse:

$$\cos\alpha:\frac{d^2x}{ds^2}=\cos\beta:\frac{d^2y}{ds^2}=\cos\gamma:\frac{d^2z}{ds}=$$

$$=1:\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

y, por lo tanto,

$$\cos\alpha=\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Estos cosenos, en funciones del radio (R) de primera curvatura, pueden aún simplificarse. En efecto; con la notación del núm. **172**:

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\cos\lambda_2-\cos\lambda_1;$$

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)=\cos\mu_2-\cos\mu_1;$$

$$d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\cos\nu_2-\cos\nu_1;$$

si elevamos al cuadrado, sumamos miembro á miembro, y tenemos en cuenta que

$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = \cos^2\lambda_2 + \cos^2\mu_2 + \cos^2\nu_2 = 1\,,$$

y

$$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 + \cos\mu_1 \cos\mu_2 + \cos\nu_1 \cos\nu_2 = \cos\theta\,,$$

se obtiene:

$$\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)\right] ds^2 = 2(1-\cos\theta) = 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \theta^2;$$

por ser infinitésimo el ángulo θ $\left(\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}\right)$. Por lo tanto,

$$R^{-1} = \frac{\theta}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2};$$

$$\cos\alpha = R\,\frac{d^2x}{ds^2}; \quad \cos\beta = R\,\frac{d^2y}{ds^2}; \quad \cos\gamma = R\,\frac{d^2z}{ds^2}.$$

178. Como ejemplo, haremos aplicación á la *hélice.* Teníamos en ella, con la notación del ejercicio **62** del número **95** del libro I:

$$\varphi' = \frac{dx}{dz} = -\frac{y}{cr}; \quad \varphi'' = -\frac{1}{cr}\frac{dy}{dz} = -\frac{x}{c^2r^2};$$

$$\psi' = \frac{dy}{dz} = +\frac{x}{cr}; \quad \psi'' = \frac{1}{cr}\frac{dx}{dz} = -\frac{y}{c^2r^2}.$$

La ecuación del plano osculador, en el punto x, y, z, habrá de ser con estos valores, representando con mayúsculas sus coordenadas generales ó corrientes, y teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = r^2$:

$$c^3ry\,X - c^3rx\,Y + Z = z.$$

Los cosenos directores de la tangente

$$\cos\lambda_1 = \frac{-y}{r\sqrt{1+c^2}}; \quad \cos\mu_1 = \frac{x}{r\sqrt{1+c^2}}; \quad \cos\nu_1 = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Luego

$$\cot\nu_1 = c.$$

La constante c es la tangente trigonométrica del ángulo formado por la tangente con el plano de las xx, yy, ó la cotangente del que forma con las generatrices del cilindro, ángulo que es el mismo de la transformada rectilínea con estas generatrices.

Los cosenos del plano osculador con los de proyecciones:

$$\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{y} = \frac{c_1}{\frac{r}{c}} \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{c}{r\sqrt{1+c^2}}x; \\ b_1 &= \frac{c}{r\sqrt{1+c^2}}y; \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \end{aligned} \right.$$

El ángulo (constante) del plano osculador con el de las xx, yy, vemos que es complementario del ν_1 de la tangente con el eje de las zz.

El radio de curvatura será:

$$R = \frac{\left(\frac{1+c^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{c^2+1}{c^6 r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = r.(1+c^2),$$

constante, y en la relación, con el del cilindro

$$\frac{R}{r} = 1 + c^2.$$

Para determinar los cosenos directores de la normal principal, tenemos las (*b*)

$$\frac{\cos\alpha}{-\dfrac{1+c^2}{c^4r^2}x}=\frac{\cos\beta}{-\dfrac{1+c^2}{c^4r^2}y}=\frac{-\cos\gamma}{\dfrac{yx-xy}{c^3r^3}};$$

y de ellas:

$$\cos\gamma=0;\quad \operatorname{tang}\alpha=\cot\beta=\frac{y}{x}.$$

Luego la proyección en el plano de las xx, yy, de esta normal principal, es el radio que va á la proyección del punto; corta al eje del cilindro horizontalmente; y como á la distancia c^2r, á contar de este eje y en dirección opuesta á la del punto, se encuentra el centro de curvatura, el lugar geométrico de estos centros habrá de ser una hélice del mismo paso de la propuesta, trazada en el cilindro de igual eje y de radio c^2r.

$$2.^{a}\text{ curv.}^{a}=\frac{c}{r(1+c^2)};$$

es constante, como la primera; y en la relación con ella

$$\frac{2.^{a}}{1.^{a}}=c=\cot\gamma_1,$$

siendo γ_1 el ángulo con que corta la hélice á las generatrices del cilindro. Para que ambas curvaturas sean iguales, habrá de tenerse

$$\gamma_1=45°.$$



LECCIÓN 19.ª

CURVAS PLANAS

TANGENTES; NORMALES; CURVATURA Y SUS SINGULARIDADES

179. *Caracteres diferenciales.*—Para que la curva

$$x = \varphi(z)$$
$$y = \psi(z)$$

sea plana, es necesario que todos sus planos osculadores se confundan en uno solo. La ecuación general de éstos, siendo las mayúsculas las coordenadas de los planos, habrá de ser (núm. **171**):

$$\psi''(z)X - \varphi''(z)Y + [\psi'(z).\varphi''(z) - \varphi'(z).\psi''(z)]Z$$
$$= \psi''(z)\varphi(z) - \varphi''(z)\psi(z) + [\psi'(z)\varphi''(z) - \varphi'(z)\psi''(z)]z.$$

La invariabilidad del plano, por la variación de z, trae consigo la de las relaciones entre los coeficientes de su ecuación, ó sea las

$$\frac{\varphi''}{\psi''} = c_1;$$

$$\frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{\psi''} = c_2;$$

$$\frac{\psi''\varphi - \varphi''\psi}{\psi''} + \frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{\psi''}z = c_3.$$

Esta última, teniendo en cuenta la anterior, queda

$$\frac{\psi''\varphi - \varphi''\psi}{\psi''} = c_3 - c_2 z .$$

Las constantes indeterminadas c_1, c_2 y c_3, las eliminaremos por derivación, obteniendo así

$$\psi''\varphi''' - \varphi''\psi''' = 0 ;$$

$$\psi'(\psi''\varphi''' - \varphi''\psi''') = 0 ;$$

$$\frac{\psi''(\psi''\varphi' - \varphi''\psi' - \varphi'''\psi) + \varphi''\psi\psi'''}{\psi''^2} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\psi''} ,$$

la condición *única*

$$\frac{\varphi'''}{\varphi''} = \frac{\psi'''}{\psi''} ;$$

ó, si se prefiere una ecuación diferencial de segundo orden, integrando:

$$\log_e \varphi'' - \log \psi'' = \log A \text{ (const)}$$

$$\frac{\varphi''}{\psi''} = \text{const} .$$

180. *Tangentes y normales.*—Siendo plana la curva, es claro que conviene tomar su plano, como único de coordenadas (xx, yy). La ecuación de la curva podrá entonces afectar una de las dos formas

$$y = f(x) ;$$

$$\varphi(x, y) = C .$$

En la primera: los coeficientes angulares de la tangente y de la normal, serán $f'(x)$ y $-\dfrac{1}{f'(x)}$ respectivamente; y, por consiguiente, la ecuación de la tangente, con el punto de contacto xy,

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x) ,$$

y la de la normal con el mismo punto de *incidencia*

$$[Y - f(x)]f'(x) + X - x = 0.$$

En la segunda forma: tendremos como ecuación de la tangente,

$$\frac{X - x}{D_x\varphi} + \frac{Y - y}{D_y\varphi} = 0;$$

y la de la normal,

$$(X - x)D_x\varphi = (Y - y)D_y\varphi.$$

g. 2.ª **181**. *Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal.*—Entiéndese por longitud de las dos primeras la de sus segmentos comprendidos entre el punto P, de contacto y de incidencia, y el eje de las xx. Las dos últimas son las proyecciones, sobre el mismo, de las dos primeras. Represéntanse, comunmente con las letras T, N, S_t y S_n; es decir,

$$T = PM; \quad N = PN; \quad S_t = pM; \quad S_n = pN;$$

Por ser $pP = y$; y la tangente trigonométrica del ángulo $pMP(\theta)$ la $f'(x)$:

$$T = y \operatorname{cosec} \theta = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

$$N = y \sec \theta = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

$$S_t = y \cot \theta = y\frac{dx}{dy};$$

$$S_u = y \operatorname{tang} \theta = y\frac{dy}{dx}.$$

Como aplicaciones geométricas de la integración de ecuaciones diferenciales, determinaremos las:

1.ª *Curva de tangente constante.*

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=a\,;$$

separadas las variables

$$dx=\left[\left(\frac{a}{y}\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}}dy\,;$$

que con el cambio $y=\frac{a}{u}$, queda

$$dx=-au^{-2}(u^2-1)^{\frac{1}{2}}du\,;$$

integrando y haciendo uso de la fórmula (2) de reducción de las binomias (pág. 161):

$$x=-a\left[\frac{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}u^{-1}}{-1}+\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}\right]$$

$$=a\left[\sqrt{1-u^{-2}}-\text{Arg}\,Ch\,u\right]+C\,;$$

y restableciendo la variable y, con $u=ay^{-1}$:

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\,\text{Arg}\,Ch\,\frac{a}{y}+C.$$

Ecuación de una *tractriz*.

2.ª *Curva de normal constante:*

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a\,.$$

Separando las variables,

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Integrando,

$$x + C = -\sqrt{a^2 - y^2}; \quad y^2 + (x + C)^2 = a^2;$$

círculo de radio a *(normal)* con el centro en el eje de las xx.

3.ª *Curva de subtangente constante:*

$$y\frac{dx}{dy} = a; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$$

$$x = a \log_e y + C; \quad y = C'e^{\frac{x}{a}}$$

logarítmica.

4.ª *Curva de subtangente proporcional á la abscisa:*

$$y\frac{dx}{dy} = ax; \quad \frac{dx}{x} = a\frac{dy}{y}.$$

Integrando:

$$\log_e Cx = a \log_e y$$

$$y^a = Cx:$$

parábola de grado a.

5.ª *Curva de subnormal constante:*

$$y\frac{dy}{dx} = a; \quad 2y\,dy = 2a\,dx; \quad y^2 = 2ax + C:$$

parábola de segundo grado.

182. *Curvatura. Su radio.*—La segunda ó de torsión es nula, y no subsiste más que la primera ó de flexión. La expresión analítica del valor del radio de curvatura, si la ecuación única es la

$$y = f(x),$$

se reduce por la constante anulación de las coordenadas zz á

$$R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

183. *Aplicación á las cónicas.*—La ecuación general de éstas en coordenadas rectangulares, tomando como eje de las xx el focal, y la tangente en el vértice como eje de las yy, es:

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

diversificándolas las condiciones siguientes:

$$q < 0 \left\{ \begin{array}{l} > -1 \textit{ elipse}; \\ = -1 \textit{ círculo}. \end{array} \right.$$

$$q = 0 \mid \textit{parábola}.$$

$$q > 0 \left\{ \begin{array}{l} \textit{hipérbola}; \\ q = +1, \text{ íd. } \textit{equilátera}. \end{array} \right.$$

Derivando la ecuación general:

$$yy' = p + qx; \quad y' = (p + qx)(2px + qx^2)^{-\frac{1}{2}};$$

volviendo á derivar:

$$y'' = -p^2(2px + qx^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

La longitud del radio de curvatura, por consiguiente,

$$R = \frac{\left(y\sqrt{1 + y'^2}\right)^3}{p^2};$$

y como la longitud de la *normal*, en todas las curvas planas, es

$$N = y\sqrt{1 + y'^2};$$

tendremos en las cónicas, con los ejes dichos:

$$R = \frac{N^3}{p^2};$$

el cubo de la normal partido por el cuadrado del semiparámetro; siendo de muy fácil construcción el centro de curvatura.

184. *Cicloide.*—En ésta, hemos hallado:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(2\frac{r}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando:

$$y'' = -\left(2\frac{r}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} ry^{-2}.y' = -\frac{r}{y^2}.$$

Además

$$1 + y'^2 = 2\frac{r}{y};$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{R} = 2\sqrt{2ry}.$$

La longitud de la normal es en la cicloide

$$\mathrm{N} = y\sqrt{2\frac{r}{y}} = \sqrt{2ry}.$$

Luego, en ella,

$$\mathrm{R} = 2\mathrm{N}.$$

Una vez construída la normal, nada más fácil que determinar en ella la posición del centro de curvatura. Para lo primero se tiene:

$$\mathrm{S}_n = yy' = \sqrt{3ry - y^2} = \sqrt{r^2 - (r - y)^2};$$

de sencillísima construcción, puesto que es la proyección del radio del círculo generador.

185. *Catenaria.*—La ecuación sea

$$\frac{y}{a} = \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}.$$

De ella,

$$y' = \mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}; \quad 1 + y'^2 = \mathrm{Ch}^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a^2}.$$

Derivando:

$$y'' = a^{-1}\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{N} &= y\sqrt{1+y'^2} = \frac{y^2}{a} \\ \mathrm{R} &= \frac{y^2}{a} \end{aligned}\right\} \mathrm{R} = \mathrm{N};$$

el centro de curvatura se encuentra á la misma distancia de la curva que el eje de las xx, pero en su interior.

Fig. 3.ª **186**. *Colocación del centro de curvatura respecto á la tangente.*—Si la curva (ABC) tiene su centro de curvatura por debajo de la tangente, se dice que vuelve la concavidad hacia la parte negativa del eje de las yy, ó la convexidad hacia la positiva. En este caso,

$$b\mathrm{D} - b\mathrm{B} = \mathrm{BD} > 0.$$

Ahora bien: representando ab el incremento ideal dx, por el núm. **12**,

$$\mathrm{BD} = -y''\frac{dx^2}{2} + y'''\frac{dx^3}{3} - \ldots;$$

la condición analítica será

$$y'' < 0, \quad \text{ó las} \quad y'' = 0, \quad y''' > 0.$$

Para que el centro quede por encima de la tangente, las

$$y'' > 0 \quad \text{ó} \quad y'' = 0, \quad y''' < 0.$$

187. *Variación continua de la curvatura.*—Tenemos, por ejemplo, en las cónicas,

$$\mathrm{R} = p^{-2}.\mathrm{N}^3;$$

y, como con los ejes del núm. **183**

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2 + (p+qx)^2},$$

el radio no puede anularse; variará con la normal entre los valores extremos de ésta, que son en la parábola é hipérbola $N_0 = p$; $N_1 = \infty$; en la elipse $N_0 = p$, $N_1 = p(-q)^{-\frac{1}{2}}$. El valor del radio de curvatura es, por lo tanto, en los vértices de las dos primeras y en los del eje focal de la elipse $R_0 = p$; en los otros dos vértices de la elipse $p(-q)^{-\frac{3}{2}}$.

En estas cónicas no se presenta particularidad alguna *(singularidad)* respecto á la curvatura en ningún punto.

4.ª **188**. Consideremos la curva cuya ecuación en cartesianas rectangulares es:

$$y = 1 - e^{\frac{1}{x}} \qquad \textbf{(1)}.$$

Este lugar geométrico no presenta solución alguna de continuidad entre $x_0 = -\infty$ y $x_1 = -dx$, pasando y por todos los valores comprendidos entre el $y_0 = 0$ y el $y_1 = 1$.

Por derivación, y poniendo en funciones de y los resultados:

$$y' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = (1-y)[\log_e(1-y)]^2$$

$$y'' = -\frac{1+2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = -(1-y)[\log_e(1-y)+2][\log_e(1-y)]^3.$$

En la rama AC de la curva, el centro, que hasta el punto $B\left(x = -\frac{1}{2}, y = 1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$ permanecía sobre ella á una distancia finita, pasa bruscamente al infinito, con el valor

$$x = -\frac{1}{2} - dx.$$

Con el

$$x = -\frac{1}{2} + dx,$$

el radio de curvatura se hace infinito también; pero el centro cae debajo de la curva. Estos puntos, en que hay discontinuidad en el cambio de posición del centro de curvatura, constituyen una singularidad en esta curvatura.

189. *Puntos de inflexión.*—El punto B, en que hay tres puntos consecutivos en línea recta, se denomina de *inflexión*. En las *senoides*

$$y = a \operatorname{sen}(bx),$$

los puntos de inflexión son los de $y = 0$.

190. *Puntos de detención.*—Del valor $x = 0$ al $x = +dx$, hay una doble discontinuidad en la curvatura, el valor de y pasa bruscamente desde $+1$ á $-\infty$, el centro salta del eje de las yy al de las xx; estos puntos se dicen de *detención ó de ruptura,* por la discontinuidad de la ordenada, que puede en otras curvas limitarse al paso de un valor finito á otro finito.

191. *Puntos angulosos.*—Puede, sin discontinuidad en la ordenada de la curva, saltar el centro de curvatura una distancia finita ó infinita, con el incremento infinitésimo de la abscisa; los puntos en que esto sucede se denominan *angulosos*, por el ángulo finito que en ellos forman las dos cuerdas infinitésimas concurrentes. Así, en la de ecuación escalar rectangular

$$y = 1 + 2\frac{\operatorname{arctang}\frac{4}{\pi x}}{\pi}x,$$

que, por derivación, nos da:

$$y' = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctang}\frac{4}{\pi x} - \frac{4\pi x}{16 + \pi^2 x^2}\right]$$

$$y'' = -\left[1 + \left(\frac{\pi x}{4}\right)^2\right]^{-2}.$$

Fig. 5.ª Tenemos en el punto A, de coordenadas $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, para las cuerdas que van á los de $x_1 = -dx$, $y_1 = 1 + d_1y$, y $x_2 = +dx$, $y_2 = 1 + d_2y$,

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = -1 \\ y'_2 = +1 \end{array}\right\} y'']_0 = -1\,;$$

y, por consiguiente, como longitud del radio de curvatura, tanto para el punto x_1y_1 como para el x_2y_2,

$$R = 2^{\frac{3}{2}} = 2{,}828\,.$$

El incremento infinitésimo dado á la abscisa, al pasar de $-dx$ á $+dx$, ocasiona en el centro de curvatura una rotación de un cuadrante, alrededor del punto A, con el radio $2^{\frac{3}{2}}$.

Estas rotaciones finitas de la normal (en los puntos de *detención* y *angulosos)* no pueden presentarse más que en curvas de ecuación transcendente.

192. *Puntos de retroceso.*—Cuando en las inmediaciones de un punto (A) de una curva queden dos series de puntos sucesivos á un mismo lado de una recta, que pasando por el A no sea tangente en él, y de modo que la distancia entre los más próximos de las dos series (ó ramas de la curva) sea infinitésima, para estos dos puntos (de coordenadas numéricamente iguales á las del A) corresponderá una normal única y (por lo común) dos valores distintos de R. El centro de curvatura, por el incremento infinitésimo de las ordenadas, se *trasladará* á lo largo de la normal una distancia finita ó infinita (según el orden infinitesimal de las distancias de los puntos de las dos ramas). Denomínanse los puntos de las condiciones del A, de *retroceso*. Si (por quedar la tangente, común en A á ambas ramas, entre ellas), el centro se traslada de uno á otro lado de la tangente, el retroceso es *de primera especie;* cuando no, *de segunda.*

Ejemplos:

En la *cisoide*,

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x};$$

y en la *cardioide*,

$$y^2 = 2a^2 \mp 2\sqrt{a^3(a - 2x)} - 2ax - x^2;$$

retroceso de primera especie en el origen.

En la

$$(y - x)^2 = x^5,$$

retroceso de segunda especie, también en el origen.

193. *Puntos múltiples.*—En general, en éstos (es decir, en los de encuentro de varias ramas de una misma curva) no puede decirse que la curvatura presenta *singularidad* alguna. La singularidad geométrica estriba únicamente en la multiplicidad de los centros de curvatura, por la multiplicidad de las distintas ramas á que pertenecen. Si dos de éstas son tangentes, los dos centros estarán en una misma normal (á ambos ó á un mismo lado de la tangente común), diciéndose entonces, como en los de retroceso, que el *contacto* es de primera ó de segunda especie.

194. *Puntos conjugados.*—Así se denominan los que, hallándose aislados, satisfacen, sin embargo, con los valores de sus coordenadas á la ecuación del lugar geométrico, y deben, por consiguiente, considerarse formando parte de él. En la *concoide*

$$x^2y^2 + (b + y)^2(y^2 - a^2) = 0,$$

el punto de coordenadas $x = 0$, $y = -b$, completamente aislado de sus dos ramas indefinidas, pertenece al lugar geométrico. Como con un punto solo no tiene significado alguno la dirección de la tangente ó cuerda infinitésima, ni mucho menos el círculo osculador, claro es que para estos puntos los valores de y' y de R han de ser *realmente* indeterminados.

195. Cuando la ecuación de la curva se da en la forma

$$f(x, y) = \mathrm{C},$$

por lo expuesto en los números **82** y **84** del Diferencial se tiene:

$$y' = -\frac{\mathrm{D}_x f}{\mathrm{D}_y f};$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\mathrm{D}_{x^2} f + 2\mathrm{D}_{xy} f \cdot y' + \mathrm{D}_{x^2} f \cdot y'^2}{\mathrm{D}_y f}$$

$$= -\frac{\mathrm{D}_{x^2} f (\mathrm{D}_y f)^2 - 2\mathrm{D}_{xy} f . \mathrm{D}_x f \mathrm{D}_y f + \mathrm{D}_{y^2} f (\mathrm{D}_x f)^2}{(\mathrm{D}_y f)^3};$$

y, con estos valores, el del radio de curvatura será:

$$\mathrm{R} = \| \frac{[(\mathrm{D}_x f)^2 + (\mathrm{D}_y f)^2]^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{D}_{x^2} f (\mathrm{D}_y f)^2 - 2\mathrm{D}_{xy} f \mathrm{D}_x f \mathrm{D}_y f + \mathrm{D}_{y^2} f (\mathrm{D}_x f)^2}.$$



LECCIÓN 20.ª

CURVAS PLANAS

TRAYECTORIAS, ENVOLVENTES Y EVOLUTAS

196. *Trayectorias.*—La ecuación

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad (1);$$

representa en coordenadas cartesianas una línea plana para cada valor que se asigna al parámetro α. Todas las líneas obtenidas con la variación de este parámetro, constituyen lo que se denomina una *familia* de líneas. Las que cortan formando un ángulo dado (é igual para todas) á las de esta familia, se denominan *trayectorias.* Cuando el ángulo es recto, *ortogonales.*

Para el punto de coordenadas (x, y) de una de las de la familia, llamando β al ángulo de la cuerda infinitésima cortada,

$$\operatorname{tang} \beta = -\frac{D_x f}{D_y f};$$

y siendo α el de la cuerda correspondiente á las mismas coordenadas numéricas en la *trayectoria* de ecuación

$$y = \varphi(x):$$

$$\operatorname{tang} \alpha = y' = \varphi'(x).$$

Llamando A á la tangente trigonométrica del ángulo con que se cortan ambas líneas, se tendrá:

$$A = \text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\varphi'(x) + \dfrac{D_x f}{D_y f}}{1 - \varphi'(x)\dfrac{D_x f}{D_y f}} = \frac{D_x f + D_y f . \varphi'(x)}{D_y f - D_x f . \varphi'(x)} \quad (\mathbf{2}).$$

Eliminando el parámetro α entre las (**1**) y (**2**), obtendremos una ecuación que liga á las $\varphi'(x)$ con las xx é yy de los puntos de las trayectorias buscadas, á que pertenece la cuerda infinitésima, cuyo es el coeficiente angular φ'; que será, por lo tanto, la ecuación diferencial de primer orden de las trayectorias en cuestión. Integrándola, la ecuación finita.

197. *Ejemplo de trayectorias ortogonales.* — Consideremos la familia de círculos:

$$(\mathbf{1}') \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha(x + y) = 0 \left\{ \begin{array}{l} D_x f = 2(x - \alpha) \\ D_y f = 2(y - \alpha). \end{array} \right.$$

En todas las ortogonales, como $A = \infty$, la (**2**) se reduce á

$$\varphi'(x) = \frac{D_y f}{D_x f} \qquad (\mathbf{2}');$$

en el ejemplo actual, escribiendo $\varphi'(x) = y'$

$$y' = \frac{y - \alpha}{x - \alpha} = \frac{y - \dfrac{x^2 + y^2}{2(x + y)}}{x - \dfrac{x^2 + y^2}{2(x + y)}} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + 2xy};$$

ó la expresión diferencial

$$(x^2 - y^2 + 2xy)dy - (y^2 - x^2 + 2xy)dx = 0.$$

Como homogénea que es, conviene, para su integración, el cambio

$$y = u\,x; \qquad dy = u\,dx + x\,du,$$

que la transforma en

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 2u - 1}{(u-1)(u^2+1)}\,du = 0.$$

Integrando (véase el núm. **107**):

$$x(1+u^2) = C(u-1).$$

Restableciendo la variable y:

$$x^2 + y^2 + C(x - y) = 0;$$

familia de círculos que pasan por el origen y tienen sus centros en la bisectriz de los ángulos 2.° y 4.°

198. *Trayectorias á 45°.*—Con la misma familia de círculos, como $A = 1$, quitando el denominador y ordenando, queda la (**2**):

$$D_y f - D_x f = (D_x f + D_y f)\varphi'(x);$$

ó sea:

$$y - x = (x + y - 2\alpha)y';$$

y eliminando α:

$$y - x = \left(x + y - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right)y' = \frac{2xy}{x+y}\,\frac{dy}{dx};$$

$$(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0.$$

Con el cambio

$$y = u\,x;$$

se reduce á

$$(1+u^2)dx + 2x\,u\,du = 0.$$

Separadas las variables

$$\frac{dx}{x} + \frac{2\,u\,du}{1+u^2} = 0\,;$$

é integrada,

$$\log x + \log(1+u^2) = \log C\,;$$

$$x(1+u^2) = C\,; \quad x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = C\,; \quad y^2+x^2-Cx=0:$$

familia de círculos con el centro en el eje de las xx y que pasan por el origen.

199. *Envolventes.*—Cuando el ángulo de las trayectorias sea nulo, también lo será su tangente A, y la ecuación numérica (**2**) toma la forma

$$\varphi'(x) = -\frac{D_x f}{D_y f}\,.$$

Para que exista esta trayectoria, límite de las de ángulos positivos y negativos, es menester que las líneas inmediatas de la familia se vayan cortando. Las cuerdas infinitésimas serán entonces comunes á cada una de las líneas y á la trayectoria; que habrá de ser forzosamente *única,* dejando á un lado á todas aquéllas. En el caso de ser cerrada esa trayectoria límite, todas las curvas de la familia quedan en su interior. Denomínaselas, por extensión, *envolventes;* y á las líneas que por sus (infinitesimalmente sucesivas) intersecciones las engendran, *involutas.*

Por la igualdad *numérica* entre los coeficientes angulares de la *tangente* y de las dos cuerdas infinitésimas inmediatas, se deduce, desde luego, que para cada par de valores simultáneos de x é y, comunes á la envolvente y á la involuta correspondiente, el coeficiente angular de la tangente es uno mismo (en unidades finitas); tienen *envolvente* é *involuta* una tangente común, ó, lo que es lo mismo, son tangentes ambas líneas.

Siguiendo la marcha general, el problema se reduce á la eliminación del parámetro α entre la

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad (\mathbf{1}');$$

y la

$$\varphi'(x) = -\frac{D_x f}{D_y f} \qquad (\mathbf{2}').$$

Con esta eliminación se llega evidentemente á la *ecuación diferencial* de la familia (**1**′). Su *solución singular*, es decir, la función (que la satisfaga)

$$y = \varphi(x),$$

del núm. **151**, será la de la *envolvente*. Puede hallarse directamente, por ser la del lugar de los puntos de las intersecciones de dos involutas inmediatas, ó sea de las

$$f(x, y, \alpha) = 0;$$

y

$$f(x, y, \alpha + d\alpha) = 0.$$

Sistema equivalente al

$$f(x, y, \alpha) = 0;$$
$$\frac{f(x, y, \alpha + d\alpha) - f(x, y, \alpha)}{d\alpha} = D_\alpha f = 0.$$

Bastará eliminar el parámetro α entre la función f y su derivada con respecto á α, igualadas á cero, para obtener el enlace funcional de las xx é yy de todos esos puntos de intersección y, por lo tanto, la ecuación de la envolvente.

200. Pondremos como ejemplos los mismos que tratamos analíticamente en los puntos singulares. El primero será el de la familia de rectas que cortan á los ejes rectangulares á distancias del origen, cuya suma es constantemente a:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a - c} = 1 \qquad (\mathbf{1}').$$

El parámetro, en este caso, c:

$$D_c f = -\frac{x}{c^2} + \frac{y}{(a-c)^2} = 0; \quad \left(\frac{a-c}{c}\right)^2 = \frac{y}{x};$$

$$\frac{a-c}{c} = \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \frac{1}{c} = \frac{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}{a}; \qquad \frac{1}{a-c} = \frac{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}{a}.$$

Llevando estos valores á la (**1'**), obtendremos, como ecuación de la *envolvente*, la parábola de segundo grado

$$x + y + 2\sqrt{xy} = a; \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a};$$
$$y^2 - 2(x+a)y + (x-a)^2 = 0;$$

del núm. **152** (pág. 200), tangente á ambos ejes en los puntos $(a, 0)$, $(0, a)$.

2.° En la familia de círculos:

$$3(y^2 + x^2) - 4Cx + C^2 = 0,$$
$$D_C f = 2C - 4x = 0; \quad C = 2x;$$

la ecuación de la envolvente es:

$$3(y^2 + x^2) - 4x^2 = 0; \quad x^2 = 3y^2; \quad y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}};$$

las dos rectas, concurrentes en el origen, de la *solución singular* (pág. 203.)

201. *Evolutas.*—La curva lugar geométrico de los centros de curvatura de otra, se denomina *evoluta*, y esta otra, *evolvente* de aquélla. Más adelante justificaremos la denominación.

Como los centros de curvatura son los puntos de inter-

sección de las normales inmediatas, la *evolvente* no es más que la *envolvente* de la familia de rectas, constituída por las normales; y el parámetro variable, una de las coordenadas del punto de incidencia de la normal en la *evolvente;* la otra coordenada habrá que expresarla (por medio de la ecuación de esta curva) en función de la considerada como parámetro.

202. Como ejemplos, determinaremos las de las elipse, hipérbola y cicloide. En la elipse:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,;$$

tomando como parámetro la abscisa α del punto de incidencia de la normal, la ecuación de estas normales será:

$$-\left(y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2}\right)\frac{b}{a}\,\frac{\alpha}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} + x - \alpha = 0 \quad (\mathbf{1}).$$

Derivando en α, igualando á cero, y quitando el denominador,

$$ba^3y + (a^2 - b^2)(a^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad (\mathbf{2})\,;$$

y de aquí:

$$a^2 - \alpha^2 = \left(\frac{ba^3}{b^2 - a^2}\,y\right)^{\frac{2}{3}}; \qquad \sqrt{a^2 - \alpha^2} = a\left(\frac{by}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha = a\sqrt{1 - \left(\frac{by}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Llevando estos valores á la (**1**) para obtener, eliminada α la ecuación de la evoluta:

$$ax = (by)^{\frac{2}{3}}\sqrt{(b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}}} - (b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}\sqrt{(b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= -\left[(b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}};$$

y, por consiguiente,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}};$$

ó llamando

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \mathrm{A}; \quad \frac{a^2 - b^2}{b} = \mathrm{B};$$

$$\left(\frac{x}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Para pasar de la elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

á la hipérbola

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

basta escribir $-b^2$ en vez de b^2; esta sola diferencia aparecerá en la ecuación de la evoluta, que habrá de ser

$$\left(\frac{x}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

En la cicloide,

$$x = r \operatorname{arcsenver} \frac{y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2},$$

el coeficiente angular de la normal en el punto (α, β) es:

$$-\left(\frac{dx}{dy}\right)_\alpha = \frac{-\beta}{\pm\sqrt{2r\beta - \beta^2}};$$

y la ecuación de la normal, por consiguiente,

$$x \pm y\sqrt{2\frac{r}{\beta} - 1} - r \operatorname{arcsenver} \frac{\beta}{r} = 0.$$

Derivando en β:

$$-r\frac{y+\beta}{\beta\sqrt{2r\beta-\beta^2}}=0; \quad \beta=-y.$$

Eliminándola, obtendremos la ecuación de la evoluta:

$$x=r\,\text{arcsenver}\,\frac{-y}{r}\pm\sqrt{-2ry-y^2}.$$

Transportando paralelamente los ejes, con el cambio

$$x=x'+\pi r,$$
$$y=y'-2r;$$

queda la ecuación:

$$x'=r\left(\text{arcsenver}\,\frac{2r-y'}{r}-\pi\right)\pm\sqrt{2ry'-y'^2}.$$

Ahora bien, llamando

$$\text{arcsenver}\,\frac{2r-y'}{r}=\lambda,$$

$$\lambda-\pi=\mu;$$

tendremos:

$$\cos\lambda=1-\frac{2r-y'}{r}=\frac{y'-r}{r}=\frac{y'}{r}-1$$

$$\cos\mu=-\cos\lambda=1-\frac{y'}{r}; \quad \text{senver}\,\mu=\frac{y'}{r};$$

y, por consiguiente, la ecuación con estos ejes, es:

$$x'=r\,\text{arcsenver}\,\frac{y'}{r}\pm\sqrt{2ry'-y'^2}.$$

La evoluta es una cicloide idéntica á la evolvente, con sus vértices en los puntos de retroceso de ésta. El radical hay que tomarlo con signo negativo en la primera mitad de la curva, y con el positivo en la segunda.

Fig. 6.ª **203**. La evoluta podemos considerarla formada por sus cuerdas infinitésimas, y á las tangentes, en sus distintos puntos, como prolongaciones de estas cuerdas; y como estas tangentes son las normales á la evolvente, que por sus sucesivas intersecciones han determinado los centros de curvatura, el incremento infinitésimo del radio de curvatura, al pasar de una á otra normal, habrá de ser la cuerda ó el elemento de la evoluta. Si suponemos adaptado un hilo al arco A′B′ de evoluta (la de la figura es de la cicloide), y, conservándole tenso, lo separamos del punto B′, permaneciendo fijo su otro extremo A′, el B′ irá describiendo el arco B′B de la evolvente. Esto justifica las denominaciones (de *evolvo*, desarrollar.)

Tiénese también, como consecuencia, que cualquier incremento finito del radio de curvatura, el $ab - a'b'$ por ejemplo, es igual á la longitud del arco aa' de evoluta, correspondiente, desarrollado. Como en la cicloide el radio de curvatura en B es $4r$ y en B′ es nulo; y el arco desarrollado, de la evoluta, A′B′ es la mitad de la longitud de la ABB′, ésta es igual á cuatro veces el diámetro del círculo generador.

Dada la evolvente, queda precisada una *evoluta* suya. Si al hilo de que hemos hecho mención, continuando fijo por su extremo en un punto de la evoluta, le damos mayor longitud, para cada longitud distinta, irá describiendo, al desarrollarse de la evoluta, otras tantas curvas *paralelas* á la primitiva evolvente, que lo serán también de la misma evoluta.

LECCIÓN 21.ª

RECTIFICACIONES Y CUADRATURAS

Fig. 7.ª **204.** Si suponemos un hilo de flexibilidad y sutileza ideales, perfectamente adaptado á un arco de una curva cualquiera y, sin experimentar distensión alguna, lo rectificamos, su longitud medirá en unidades lineales la del arco. Para calcularla bastará efectuar la suma de sus distintos elementos, que no han variado al variar la forma. Sea AB el arco en cuestión (de una curva plana) y AB′ la longitud de hilo que, primitivamente adaptado á la curva, lo llevamos sobre la tangente en A. Si llamamos á la cuerda AB, *l*; al arco, *s*; á BB′, *m*; al ángulo BAB′, θ:

$$s = l \cos\theta + \sqrt{m^2 - l^2 \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Cuando el arco AB sea infinitésimo, por lo demostrado en el núm. **12** del Diferencial $m = BB'$ lo será de segundo y, por consiguiente, tang θ, sen θ y θ de primero; el *senver* θ de segundo. Luego, si la unidad es dx:

$$ds = l + N\varepsilon^2 = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + N\,dx^2$$

$$= M\,dx + N\,dx^2.$$

Siendo N_1 el valor máximo de N de todos los elementos del arco que consideremos, al integrar tendremos

$$s > \int_A^B M\,dx; \quad s < \left(\int_A^B M\,dx + N_1\,dx \int_A^B dx\right).$$

Ahora bien:

$$N_1\,dx \int_A^B dx = N_1\,dx\,\Delta_A^B x,$$

es un infinitésimo de primero, que en las unidades finitas en que se mide s es numéricamente nulo; y por lo tanto,

$$s = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Como, aunque la curva sea de doble curvatura, en *un elemento* no puede haberla, tendremos la misma fórmula de rectificación. Claro es que en las planas se toma su plano de xx, yy, y en este caso:

$$s = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_A^{B'} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Escogeremos para variable independiente la que, por la ecuación de la curva, facilite la integración.

205. *Hélice.*—Como ejemplo de las de doble curvatura, la rectificaremos. En el ejercicio **62** del Diferencial, teníamos:

$$x^2 + y^2 = R^2 \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= -\frac{y}{cR} \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{x}{cR}. \end{aligned} \right.$$

Por consiguiente:

$$s = \int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{\frac{y^2}{c^2R^2} + \frac{x^2}{c^2R^2} + 1} = \int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{\frac{1+c^2}{c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(z_1 - z_0);$$

ó, como llamando φ al ángulo con que corta la hélice á las generatrices del cilindro,

$$c = \cot\varphi; \quad s = (z - z_0)\sec\varphi.$$

206. *Catenaria.*—En la

$$y = a \operatorname{Ch}\frac{x}{a}: \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{Sh}\frac{x}{a};$$

y, por consiguiente,

$$s = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2\frac{x}{a}} = a\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{Ch}\frac{x}{a}\, d\frac{x}{a} = a\left(\operatorname{Sh}\frac{x_1}{a} - \operatorname{Sh}\frac{x}{a}\right).$$

207. *Cicloide.*—Como en ella (Ejercicio **59**),

$$\frac{dx}{dy} = \left(2\frac{r}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad ds = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r - y}}dy.$$

Para la mitad de una arcada,

$$s = \sqrt{2r}\int_0^{2r} \frac{dy}{\sqrt{2r - y}} = \sqrt{2r}\left[2\sqrt{2r - y}\right]_{2r}^{0} = 4r.$$

208. *Cónicas.*—De la ecuación general,

$$y^2 = 2px + qx^2; \quad y\,dy = (p + qx)dx;$$

y, por consiguiente,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y^2+(p+qx)^2}{y^2}=\frac{p^2+(1+q)(2px+qx^2)}{2px+qx^2}:$$

$$s=\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{p^2+(1+q)(2px+qx^2)}{2px+qx^2}}.$$

Las únicas en que puede verificarse exactamente la integración, son la *parábola* y el círculo. En la primera $q=0$:

$$s=\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}.$$

Para integrar, nos conviene el cambio:

$$\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}=u\left\{\begin{array}{l}x=\frac{p}{2}(u^2-1)^{-1}\\ dx=-p(u^2-1)^{-2}u\,du\end{array}\right.$$

que la transforma en

$$s=-p\int_{x_0}^{x}u^2(u^2-1)^{-2}du.$$

Aplicando la fórmula (1) de las binomias,

$$s=-p\left[-\frac{u}{2(u^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-1}\right]_{x^0}^{x}=$$

$$=\frac{p}{2}\left[\frac{u}{u^2-1}+\text{Arg Cth}\,u\right]_{x_0}^{x};$$

ó, restableciendo la variable x,

$$s=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2px+4x^2}+\frac{p}{2}\log_e\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}\right]_{x_0}^{x};$$

pero

$$\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}=\frac{\left(\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}\right)^2}{p};$$

luego,

$$s=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2p\,x+4x^2}-\sqrt{2p\,x_0+4x_0{}^2}+p\log_e\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x_0}+\sqrt{2x_0}}\right].$$

Contando los arcos á partir del vértice, $x_0=0$:

$$s=\sqrt{\frac{p}{2}\,x+x^2}+\frac{p}{2}\log_e\left(\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}\right)-\frac{1}{4}\,p\log_e p.$$

En el círculo:

$$q=-1;\quad p=r;$$

y, por lo tanto,

$$s=r\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{r^2-(r-x)^2}}=r\left[\operatorname{arccos}\frac{r-x}{r}\right]_{x_0}^{x}.$$

En la elipse:

$$q=-\frac{b^2}{a^2};\quad p=\frac{b^2}{a};\quad \frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2;$$

y nos queda:

$$s=\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{b^2+e^2(2ax-x^2)}{2ax-x^2}};$$

ó, llevando el origen al centro:

$$s=\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

Si llamamos $\frac{x}{a} = z$:

$$s = a\int_{z_0}^{z} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz (1 - e^2 z^2)^{\frac{1}{2}};$$

y se desarrolla en serie el último factor:

$$(1 - e^2z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2}{2} z^2 - \frac{1}{2^2 2!} e^4 z^4 - \frac{1.3}{2^3 3!} e^6 z^6 - \frac{1.3.5}{2^4 4!} e^8 z^8 - \ldots$$

tendremos, por descomposición, para un cuarto de elipse ($z_0 = 0$, $z = 1$):

$$s = a\int_0^1 (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz - \frac{ae^2}{2}\int_0^1 z^2 (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz -$$

$$- \frac{ae^4}{2^2 2!}\int_0^1 z^4 (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz - \ldots$$

Ahora bien, por la fórmula (**3**) de las binomias:

$$\int z^m (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{z^{m-1}}{m}(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{m}\int z^{m-2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Entre los límites $z = 0$ á $z = 1$:

$$\int_0^1 z^m (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{m-1}{m}\int_0^1 z^{m-2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Análogamente:

$$\int_0^1 z^{m-2} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{m-3}{m-2}\int_0^1 z^{m-4}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz;$$

$$\int_0^1 z^{m-4} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{m-5}{m-4}\int_0^1 z^{m-6}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz;$$

....

$$\int_0^1 z^2 (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{m-(m-1)}{m-(m-2)}\int_0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Multiplicando ordenadamente y reduciendo:

$$\int_0^1 z^m(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 5.3.1}{m(m-2)(m-4)\ldots 6.4.2}\,\frac{\pi}{2}:$$

fórmula general; que nos da los valores de todas las integrales que necesitamos. Con éstos:

$$s = \frac{\pi a}{2}\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{5}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots\right].$$

g. 8.ª **209**. *En polares.*—Siendo O el polo y OA y OA′ dos radios vectores consecutivos; A′a perpendicular á OA; ángulo AOA′ $= d\varphi$:

$$ds = \text{cuerda AA}' = \sqrt{a\text{A}^2 + a\text{A}'^2}.$$

Estas longitudes aA y aA′, no son más que los *tensores* (*) de las diferenciales *radial* y *circular*, respectivamente, del núm. **42** (pág. 51); es decir, llamando r al *tensor* del radio vector

$$\left.\begin{array}{l} a\text{A} = dr \\ a\text{A}' = rd\varphi \end{array}\right\} ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}.$$

Como ejemplo rectificaremos la *cardioide*, cuya ecuación es:

$$r = 2a(1-\cos\varphi);$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d\varphi}{dr}\,\frac{1}{2a\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{4ar - r^2}};$$

$$ds = dr\sqrt{\frac{4ar}{4ar - r^2}} = 2\sqrt{a}\,\frac{dr}{\sqrt{4a - r}} = -4\sqrt{a}\,d\sqrt{4a - r}.$$

Integrando la mitad, de $r = 0$ á $r = 4a$:

$$s = 8a.$$

(*) Puesto que un *vector* ó un *escalar* pueden considerarse como un cuaternio, en que S$q = 0$ ó V$q = 0$, la denominación y notación de *tensor* se aplica también al valor absoluto ó modular de ambos.

Cuadraturas.

210. La determinación del área comprendida dentro de un contorno cerrado, se denomina, de muy antiguo, *cuadratura.*

Fig. 9.ª Si la ecuación de la curva que la limita se nos da en coordenadas cartesianas, para determinar el área limitada por el arco AB, las ordenadas extremas A′A, B′B y el incremento A′B′ de la abscisa, conviene descomponer esta última en sus elementos dx (del cual suponemos sea representación $a'b'$), quedando así descompuesta el área total en sumandos *diferenciales*, tales como el trapecio mixtilíneo $a'b'ba$ (cuya área denominaremos dA). Como este área se halla comprendida entre las de los paralelógramos $a'b'ca$ y $a'b'bc'$, y la diferencia de éstos es la del $cac'b$, de dos dimensiones infinitésimas,

$$dA = \text{área } a'b'ca \pm N\varepsilon^2 .$$

El signo superior, si el centro de curvatura queda por debajo; el inferior, si por encima. Como el lado aa' es la ordenada y; el $a'b'$, dx, y el ángulo de los ejes, θ:

$$dA = \text{sen}\,\theta\, y\, dx \pm N\varepsilon^2 ; \qquad \frac{dA}{dx} . dx = \text{sen}\,\theta\, y .$$

El área A′ABB′, por lo tanto, si $y = f(x)$; $x = \varphi(y)$:

$$A = \text{sen}\,\theta \int_{A'}^{B'} f(x) dx = \text{sen}\,\theta \int_{A}^{B} \varphi'(y) y\, dy .$$

211. *Segmento parabólico.*—Tomando como ejes la tangente paralela á la cuerda que limita el segmento y su diámetro conjugado, la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 2p'x ; \qquad x = \frac{y^2}{2p'} ;$$

y, por consiguiente, puesto que el eje de las xx divide en dos partes iguales á cada una de las cuerdas paralelas, y por ende al área total del segmento:

$$A = 2 \operatorname{sen} \theta \int_0^{x_1, y_1} \frac{y^2 dy}{p'} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{p'} \frac{y_1^3}{3};$$

que puede escribirse:

$$A = \frac{2}{3}(2y_1)(x_1 \operatorname{sen} \theta) = \frac{2}{3} A_1;$$

llamando A_1 al área del paralelógramo circunscripto al segmento; sus dos terceras partes.

212. *Cicloide.*—Área encerrada entre una arcada y el eje de las xx. Ecuación:

$$x = r \operatorname{arcsenver} \frac{y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2}.$$

Como los ejes son rectangulares, sen $\theta = 1$; y es simétrica á ambos lados del vértice ($y_1 = 2r$):

$$A = 2\int_0^{2r} \frac{dx}{dy} y\, dy = 2\int_0^{2r} \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ry - y^2}}.$$

Para la integración, nos conviene el cambio:

$$y = r(1 + u);$$

que la transforma en

$$A = 2r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{1 + 2u + u^2}{\sqrt{1 - u^2}} du = 2r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{2(1 + u)du - (1 - u^2)du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= 4r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - 4r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{-u\, du}{\sqrt{1 - u^2}} - 2r^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2}\, du;$$

integrales todas conocidas que, con estos límites, nos dan:

$$A = 4r^2 . 2\frac{\pi}{2} - 0 - 2r^2\frac{1}{2}\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi r^2;$$

triple de la del círculo generador.

213. *Hipérbola equilátera.*—Referida á sus asíntotas:

$$2xy = a^2.$$

El área limitada por la curva el eje de las xx, la ordenada del vértice $\left(x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y la corriente, valdrá:

$$A = \int_{x_0}^{x} \frac{a^2}{2x}\,dx = \frac{a^2}{2}\left[\log_e x\right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{x} = \frac{a^2}{2}\log_e \frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Para $a = \sqrt{2}$, $A = \log_e x$; por esta razón los logaritmos neperianos se denominan también *hiperbólicos*.

Fig. 10. **214**. *En polares.*—En este caso la descomposición que conviene es en sectores elementales, como el representado en AOB, que no difiere del circular aOB más que en el área de segundo orden aAB. Llamándole dA, en unidades de primero:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Aplicándola á la *elipse* é *hipérbola*, con polo en el centro y eje polar el de los focos (el signo superior corresponde á la primera):

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi \pm a^2\operatorname{sen}^2\varphi};$$

y el área sectoral, entre el eje polar y el radio corriente, valdrá:

$$A = \frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{b^2\cos^2\varphi \pm a^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\sec^2\varphi\, d\varphi}{b^2 \pm a^2\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Cambiando de variable, con

$$a \operatorname{tang} \varphi = bz\,; \qquad a \sec^2\varphi\, d\varphi = b\, dz:$$

$$A = \frac{ab}{2}\int_0^z \frac{dz}{1 \pm z^2}. \qquad z = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi\,;$$

En la *elipse* (signo superior):

$$A = \frac{ab}{2} \operatorname{arctang}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi\right).$$

Para un cuadrante, $\operatorname{tang} \varphi = \infty$:

$$A = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

El área de la elipse entera:

$$4A = \pi ab.$$

En la *hipérbola:*

$$A = \frac{ab}{2} \operatorname{Arg} \mathrm{T}h\left(\frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi\right).$$

Si es la equilátera de semiejes unidades:

$$2A = \operatorname{Arg} \mathrm{T}h(\operatorname{tang} \varphi).$$

Es decir, que el *argumento* de las hiperbólicas es, numéricamente, el duplo del área sectoral.

ig. 11. **215**. *Cuadraturas aproximadas.—Fórmula de Simpson.* —Para determinar el área a_0ABa_n cuando no se conoce la ecuación de la curva AB, y solamente los valores de un número impar $(n + 1)$ de ordenadas equidistantes $y_0, y_1 \dots y_n$, con tanta mayor aproximación cuanto mayor sea el número éste, lo más cómodo es reemplazar el arco dado, que pasa por tres puntos consecutivos, por un arco de parábola.

En los tres primeros, por ejemplo, llamando A_1 al área del trapecio rectilíneo $a_0Ab'a_2$, A_2 á la del segmento parabólico Abb' y A al área $a_0Abb'a_2$ del trapecio mixtilíneo:

$$A = A_1 + A_2.$$

Llamando h á la separación de las ordenadas:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (y_0 + y_2)h \\ A_2 &= \frac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)2h \end{aligned}\right\} A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Sumando las $\frac{n}{2}$ áreas análogas, correspondientes á todo el intervalo a_0a_n, el área total será:

$$\Sigma A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})\right].$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de *Th. Simpson.*

LECCIÓN 22.ª

SUPERFICIES CURVAS, CUADRATURAS,

CUBATURAS

216. *Plano tangente. Normal.*—Como numéricamente no hay error (en unidades finitas) en suponer la tangente á una curva cualquiera en un punto (x, y, z) formando el mismo ángulo con los ejes que la cuerda del arco infinitésimo correspondiente, los cosenos directores de la tangente á cualquier curva trazada en una superficie $f(x, y, z) = 0$, valdrán:

$$\frac{dx}{ds}; \quad \frac{dy}{ds}; \quad \frac{dz}{ds};$$

y las ecuaciones de esa tangente, si llamamos X, Y, Z á sus coordenadas generales, habrán de ser las

$$\frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z} \qquad (\mathbf{1}).$$

La ecuación de la superficie nos da, por diferenciación

$$D_x f . dx + D_y f . dy + D_z f . dz = 0.$$

Para todas las curvas trazadas en la superficie, las dx, dy, dz habrán de satisfacerla, y, por lo tanto, las cantidades que por la (**1**) les son proporcionales. Luego:

$$(X - x) D_x f + (Y - y) D_y f + (Z - z) D_z f = 0 \qquad (\mathbf{2}).$$

No tratándose de *puntos singulares* (en que tomen sus derivadas parciales el valor ∞), para cada punto (x, y, z) de la superficie por que pasen las curvas, los coeficientes $D_x f$, $D_y f$, $D_z f$ tendrán sendos valores precisos, y la ecuación (**2**), á que satisfacen las coordenadas de todas las tangentes á todas las curvas, será la de un plano.

Este lugar geométrico de todas las tangentes (no siendo en puntos singulares) de las curvas que pasan por un punto dado de la superficie, se denomina *plano tangente* á la superficie en ese punto. La perpendicular, en el de contacto, se denomina *normal* á la superficie; y sus cosenos directores serán, por consiguiente:

$$\frac{D_x f}{\sqrt{(D_x f)^2 + (D_y f)^2 + (D_z f)^2}};$$

$$\frac{D_y f}{\sqrt{(D_x f)^2 + (D_y f)^2 + (D_z f)^2}};$$

$$\frac{D_z f}{\sqrt{(D_x f)^2 + (D_y f)^2 + (D_z f)^2}}.$$

Si la ecuación de la superficie se da en la forma

$$z = F(x, y);$$

y se llama, según es costumbre:

$$\frac{dz}{dx} = p; \qquad \frac{dz}{dy} = q;$$

como

$$f(x, y, z) = F(x, y) - z = 0;$$
$$D_x f = D_x F = D_x z = p;$$
$$D_y f = D_y F = D_y z = q;$$
$$D_z f = -1;$$

los cosenos directores de la normal, quedan:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

217. *Contorno aparente.*—Para determinar el contorno aparente, de una superficie de ecuación conocida, sobre el plano de las xy, por ejemplo, como ha de provenir del contacto con el cilindro circunscripto proyectante, cuyos planos tangentes sean perpendiculares al xy, siendo también tangentes á la superficie, bastará determinar el lugar geométrico común á todos los puntos de la superficie en que el plano tangente sea paralelo al eje de las z.

Si la ecuación de la superficie es la

$$f(x, y, z) = 0;$$

en los puntos de contacto la normal habrá de ser paralela al plano xy, y, por lo tanto, $D_z f = 0$; quedando esos puntos precisados por las dos ecuaciones

$$f(x, y, z) = 0;$$
$$D_z f = 0.$$

Para obtener la de su proyección sobre el plano xy, ó sea la de la traza del cilindro circunscripto, bastará eliminar z entre ambas.

218. *Superficies envolventes é involutas.*—La ecuación

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

en coordenadas cartesianas, para cada valor numérico que asignemos al parámetro α, representará una superficie determinada; á su conjunto se denomina *familia* de superficies. Cuando en la variación infinitesimal del parámetro se van cortando las inmediatas, estas intersecciones, que se dicen *características*, constituirán una serie de *curvas* infi-

nitamente próximas, y su lugar común otra superficie, que se llama *envolvente* de las primitivas. Cada una de las primitivas, *involuta*, respecto á la engendrada por las *características*.

La ecuación de una característica, como intersección de las dos superficies:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0\,;$$

quedará precisada con este sistema, ó con su equivalente:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (\mathbf{1})\,;$$

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + d\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = D_\alpha f = 0 \qquad (\mathbf{2}).$$

Bastará eliminar α entre ellas para obtener la

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (\mathbf{3})\,,$$

á que tienen que satisfacer todas las características, y será, por lo tanto, la ecuación de la *envolvente* de todas las curvas de la familia $f(x, y, z, \alpha) = 0$.

Para demostrar que la envolvente es tangente á cada una de las involutas en los puntos comunes, bastará ver que el plano tangente es uno mismo; y, para ello, que son idénticos los cosenos directores de la normal.

Para obtener la (**3**) podemos despejar el parámetro α en la (**2**):

$$\alpha = \psi(x, y, z)\,;$$

llevando este valor á la (**1**):

$$\Phi(x, y, z) = f[x, y, z, \alpha = \psi(x, y, z)] = 0 \qquad (\mathbf{4}).$$

En cada involuta, para el punto de coordenadas x, y, z los cosenos de la normal son proporcionales á los valores

$$D_x f\,; \qquad D_y f\,; \qquad D_z f.$$

Para el mismo punto, en la envolvente, á los

$$D_x\Phi\,; \quad D_y\Phi\,; \quad D_z\Phi.$$

Ahora bien, por la (1):

$$D_x\Phi = D_x f + D_a f . D_x\psi\,;$$

y por la (2):

$$D_a f = 0\,;$$

luego

$$D_x\Phi = D_x f\,;$$

y, análogamente, los otros dos. El plano tangente es común, á todo lo largo de una característica, á la envolvente y á la *involuta* respectiva; siendo esa característica la curva de contacto de ambas superficies.

g. 12. **219**. *Area de superficies curvas.*—Para determinar este área, consideremos *un elemento*, que suponemos limitado por el cuadrilátero curvilíneo, formado por las intersecciones de la superficie con cuatro planos: dos paralelos al YZ y distantes uno de otro en dx; los otros dos al ZX, distanciados en dy. La intersección del plano tangente en el punto A(x, y, z) con los mismos, da el paralelógramo AB′C′D′. Si llamamos al elemento de área curva dA, á la del cuadrilátero de las cuerdas ABCD, A_1:

$$AB'C'D' + ABB' + BB'C'C + CC'D'D + DD'A > dA > A_1.$$

Pero, por ser AB′ y AD′ tangentes de los arcos AB y AD, BB′ y DD′, y, por lo tanto, CC′, son infinitésimos de segundo orden; las cuatro áreas últimas del primer miembro de la desigualdad, lo son del tercero; y tenemos:

$$AB'C'D' + N\varepsilon^3 > dA > A_1.$$

El área A_1 no es más que la proyección (oblicua) de la AB′C′D′, que forma con ella un ángulo infinitésimo de primer orden; y, por consiguiente:

$$A_1 = AB'C'D' - N_1\varepsilon^4.$$

Luego *en unidades de segundo* (ε^2):

$$\frac{AB'C'D'}{\varepsilon^2} = \frac{dA}{\varepsilon^2} = \frac{A_1}{\varepsilon^2}.$$

Es decir, que el *área elemental* considerada, no difiere numéricamente de la plana AB′C′D′, cuya proyección sobre el plano de las XY es la

$$abcd = dx.dy.$$

Como $cC - aA$ es la dz correspondiente á estas dx y dy, y CC′ es de segundo orden, las proyecciones del paralelógramo AB′C′D sobre los planos de las YZ y ZX serán otros cuyas áreas medirán, en ε^2, respectivamente:

$$dy.dz; \quad dz.dx.$$

Llamando a,b,c á los cosenos directores de la normal á la superficie en el punto A, como los ángulos de la normal con los tres ejes son los mismos del plano tangente con los tres planos perpendiculares á aquéllos:

$$dA.a = dy\,dz;$$

$$dA.b = dz\,dx;$$

$$dA.c = dx\,dy;$$

$$dA = dx\,dy\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

La determinación del área total, de que dA es elemento, se reduce á una integración *doble* entre los límites conve-

nientes. El orden sabemos que es indiferente: si escogemos el

$$A = \int dx \int dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1};$$

esto equivale á suponer una división en zonas de altura dx, siendo el área de cada una de estas zonas elementales:

$$dx \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1};$$

entre los límites extremos de los valores de y en la zona, correspondientes á los del contorno aparente sobre el plano XY. Los límites de la última integración, ó en x, serán los extremos correspondientes (x_0, x_1):

$$A = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1=f_1(x)}^{y_2=f_2(x)} dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Como ejemplo aclaratorio, determinaremos el área de la superficie esférica de radio R, suponiéndola tangente á los tres planos de coordenadas, ó sea de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2R(x + y + z) + 2R^2 = 0;$$

$$z = R \pm \sqrt{R^2 - (x - R)^2 - (y - R)^2}.$$

La del contorno aparente sobre el plano XY, es:

$$y = R \pm \sqrt{R^2 - (x - R)^2}.$$

Por lo tanto:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 2R;$$

$$y_1 = f_1(x) = R - \sqrt{R^2 - (x - R)^2};$$

$$y_2 = f_2(x) = R + \sqrt{R^2 - (x - R)^2}.$$

Además:

$$\sqrt{p^2+q^2+1}=\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\mathrm{R})^2-(y-\mathrm{R})^2}}.$$

Luego:

$$\mathrm{A}=\mathrm{R}\int_0^{2\mathrm{R}} dx \int_{y_2}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\mathrm{R})^2-(y-\mathrm{R})^2}}.$$

Ahora bien:

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\mathrm{R})^2-(y-\mathrm{R})^2}}=\left[\operatorname{arcsen}\frac{y-\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\mathrm{R})^2}}\right]_{y_1}^{y_2}=$$

$$=2\operatorname{arcsen} 1=\pi;$$

y, consiguientemente,

$$\mathrm{A}=\pi\mathrm{R}\int_0^{2\mathrm{R}} dx=4\pi\mathrm{R}^2.$$

220. En un segundo ejemplo determinaremos el área del casquete esférico, de contorno alabeado, que en la esfera

$$x^2+y^2+z^2=4a^2,$$

limita la curva de intersección con el cilindro recto

$$(x-a)^2+y^2=a^2; \quad y^2=2a\,x-x^2.$$

Esta ecuación de la traza es, al propio tiempo, la del contorno aparente sobre el XY; y, por lo tanto:

$$y_1=-\sqrt{2a\,x-x^2}; \quad x_0=0;$$

$$y_2=+\sqrt{2a\,x-x^2}; \quad x_1=2a;$$

y como

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}:$$

$$A = 2a\int_0^{2a} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(4a^2 - x^2) - y^2}} = 4a\int_0^{2a} dx \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{2ax - x^2}{4a^2 - x^2}}$$

$$= 4a\int_0^{2a} dx \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{x}{2a}}.$$

Conviene, para la integración, el cambio

$$\sqrt{\frac{x}{2a}} = u; \quad x = 2a\,u^2; \quad dx = 4a\,u\,du;$$

que nos da:

$$A = 8a^2\int_0^1 (2u\,du) \operatorname{arctang} u.$$

Integrando por partes:

$$A = 8a^2\Big[u^2 \operatorname{arctang} u - \int u^2(u^2 + 1)^{-1}du\Big]_0^1.$$

Ahora bien:

$$\int u^2(u^2 + 1)^{-1}du = \int \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1}\,du = \int du - \int \frac{du}{1 + u^2};$$

y, por lo tanto,

$$A = 8a^2\Big[u^2 \operatorname{arctang} u - u + \operatorname{arctang} u\Big]_0^1$$

$$= 8a^2\Big[2\,\frac{\pi}{4} - 1\Big] = 4{,}566370a^2.$$

221. *Superficies de revolución.*—En este caso se puede abreviar, y no efectuarse más que una integración. Si se

toma como eje de las XX el de revolución, y por generatriz la curva plana, intersección con el plano XY, de ecuación

$$y = f(x);$$

Fig. 13. que nos da, si A y C son respectivamente los puntos más próximo y más lejano del eje de las Y, para la parte superior ABC:

$$y_2 = f_2(x);$$

para la inferior:

$$y = f_1(x).$$

La superficie total será la misma de las engendradas por el arco ABC y por el AB′C. En la primera, sin error numérico, podemos reemplazar el elemento de curva *ab* por su cuerda, que engendrará el arco lateral de un tronco de cono de revolución, de eje X, cuyas dos bases tienen por radio y é $y + dy$, y cuya apotema es la cuerda $ab = ds$; valiendo este área *elemental:*

$$dA = 2\pi \frac{y + y + dy}{2} ds.$$

En unidades de primero,

$$dA = 2\pi\, y\, ds = 2\pi\, f_2(x) \sqrt{1 + f_2'^2(x)}\, dx;$$

y, por consiguiente, el área engendrada por el arco superior ABC:

$$A_2 = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f_2(x) dx \sqrt{1 + f_2'^2(x)}.$$

Análogamente, la engendrada por el AB′C:

$$A_1 = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx \sqrt{1 + f_1'^2(x)}.$$

Cuando los puntos A y C están en el eje de revolución, esta A_1 es nula. En el caso general, el área total será:

$$A = A_1 + A_2.$$

222. *Superficie tórica.*—Con el eje de las YY pasando por el centro de la circunferencia generatriz, que se halla á la distancia l del centro del *toro* (mayor que el radio r):

$$f_1(x) = l - \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$f_2(x) = l + \sqrt{r^2 - x^2};$$

y, por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 = 2\pi \int_{-r}^{+r} dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,(2l) = 4\pi l r \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Pero

$$\int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[\operatorname{arcsen} \frac{x}{r}\right]_{-r}^{+r} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$$

luego:

$$A = 2\pi l . 2\pi r.$$

El producto de la circunferencia generatriz por la descrita por su centro.

223. *En los elipsoides:*

$$A_1 = 0; \qquad f_2(x) = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

$$A = 2\pi b \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}}.$$

Según que el elipsoide sea *achatado* ó *alargado*, es decir según que b sea mayor ó menor que a:

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \pm e^2.$$

En el primer caso (signo superior), haciendo:

$$\frac{e}{a}x = u; \qquad dx = \frac{a}{e}du.$$

$$A = 2\pi a \frac{b}{e}\int_{-e}^{+e} du \sqrt{1+u^2}$$

$$= \pi a \frac{b}{e}\Big[\text{Arg } Sh\, u + u\sqrt{1+u^2}\Big]_{-e}^{+e}$$

$$= 2\pi a \frac{b}{e}\Big[\text{Arg } Sh\, e + e\sqrt{1+e^2}\Big]$$

$$= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}} \log_e \frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a} + 2\pi b^2.$$

En el segundo caso (signo inferior):

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = e;$$

con el mismo cambio:

$$A = 2\pi a \frac{b}{e}\int_{-e}^{+e} du \sqrt{1-u^2} = 2\pi a \frac{b}{e}\left[\text{arcsen } e + e\sqrt{1-e^2}\right];$$

ó sea:

$$A = 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ arcsen } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} + 2\pi b^2.$$

Para determinar, como caso particular, el área de la superficie esférica, la escribiremos:

$$A = 2\pi a b \frac{\text{arcsen } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} + 2\pi b^2.$$

Con $a = r$ (radio), y haciendo crecer á b hasta adquirir la longitud a:

$$\frac{\operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} = 1\,;$$

y queda:

$$A = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r^2 = 4\pi\, r^2.$$

224. *Casquete recto de paraboloide.*—Si su altura es X y la ecuación de la generatriz

$$y^2 = 2px\,; \quad y' = \frac{p}{y}\,;$$

y, por lo tanto:

$$y\,ds = dx\sqrt{p^2 + y^2} = \frac{y\,dy}{p}\,(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,;$$

conviene tomar como variable independiente la y. Los límites habrán de ser desde $x_0 = y_0 = 0$ á $x_1 = X$; $y_1 = Y = \sqrt{2pX}$:

$$A = \frac{2\pi}{p}\int_0^Y (p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{d(p^2 + y^2)}{2} = \frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^Y$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\Big].$$

225. *Cubaturas.*—Así como la operación de determinar un área se denomina *cuadratura*, la de calcular un volumen suele llamarse *cubatura*. Si la superficie que lo limita se da por su ecuación en rectangulares, lo más cómodo es dividirle en *elementos* de tres dimensiones infinitésimas por planos paralelos á los de coordenadas, equidistantes en dx, dy, dz; reduciéndose el problema á una integración *triple* entre los límites convenientes para comprender con ella á todo el volumen.

Si queremos efectuar las integraciones en el orden z, y, x, supondremos agrupados los paralelipípedos elementales del modo siguiente: en rebanadas paralelas al plano de las YZ (de grueso dx); dentro de cada rebanada en pilas paralelas al eje Z. Quedando de este modo constituída la integral triple, volumen total:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dy \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz \quad ;$$

siendo f_1 y f_2 los valores de z extremos de *pila* (puntos de la superficie), los φ_1 y φ_2 los extremos de y en cada rebanada (puntos del contorno sobre el plano XY) y x_0, x_1 los mínimo y máximo de x.

Así, por ejemplo, para el volumen de la esfera

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

tenemos:

$$f_1(x, y) = a - \sqrt{a^2 - (x - a)^2 - (y - a)^2};$$

$$f_2(x, y) = a + \sqrt{a^2 - (x - a)^2 - (y - a)^2};$$

$$\varphi_1(x) = a - \sqrt{a^2 - (x - a)^2};$$

$$\varphi_2(x) = a + \sqrt{a^2 - (x - a)^2};$$

$$x_0 = 0;$$

$$x_1 = 2a;$$

Y por consiguiente:

$$V = 2\int_0^{2a} dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \sqrt{a^2 - (x - a)^2 - (y - a)^2};$$

llamando $\sqrt{a^2-(x-a)^2}=u$, la integral en y es:

$$\int_{a-u}^{a+u} dy \sqrt{u^2-(y-a)^2} = u^2 \int_{a-u}^{a+u} d\,\frac{y-a}{u} \sqrt{1-\left(\frac{y-a}{u}\right)^2}$$

$$= \frac{u^2}{2}\left[\operatorname{arcsen}\frac{y-a}{u} + \frac{(y-a)\sqrt{u^2-(y-a)^2}}{u^2}\right]_{a-u}^{a+u}$$

$$= \frac{u^2}{2}\left[2 \operatorname{arcsen} 1\right] = \frac{\pi}{2} u^2.$$

Con este valor:

$$V = \pi \int_0^{2a} [a^2-(x-a)^2]dx = \pi\left[a^2x - \frac{(x-a)^3}{3}\right]_0^{2a}$$

$$= \pi\left[2a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

226. Cuando el área base de cada rebanada puede ponerse en función de x (con la subdivisión del número anterior), se reduce la *cubatura* á una integración única; así, por ejemplo, para la del elipsoide de tres ejes desiguales, cuya superficie tenga por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

y sus trazas en los XY y XZ, respectivamente:

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \varphi_1(x);$$

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \varphi_2(x);$$

las elipses bases de cada rebanada, tendrán por área:

$$\pi\,\varphi_1 . \varphi_2 = \pi\, b\, c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \pi\frac{b\,c}{a^2}(a^2-x^2);$$

el volumen (elemental) de cada rebanada, exactamente en unidades de primero (cilindro recto):

$$dV = \pi \frac{b\,c}{a^2} (a^2 - x^2)dx.$$

El volumen total, constituído por la suma de estos elementales:

$$V = \pi \frac{b\,c}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)dx$$

$$= \pi \frac{b\,c}{a^2} \left[a^3 - (-a^3) - \frac{a^3}{3} + \left(- \frac{a^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Si queremos el del segmento recto del paraboloide elíptico,

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \sqrt{2px} \\ \varphi_2 = \sqrt{2qx} \end{array} \right\} dV = 2\pi \sqrt{pq}\, x\, dx;$$

y, por consiguiente:

$$V = \pi \sqrt{pq} \int_0^X 2x\, dx = \pi \sqrt{pq}\, X^2 = \frac{1}{2} (\pi Y . Z) X;$$

mitad del cilindro circunscripto, de igual altura (X) que el segmento.

227. En volúmenes limitados por superficies de revolución, sin error en unidades de primero, podemos tomar, como volumen de la rebanada elemental, la engendrada por el rectángulo de altura $a'a$ y base dx, anillo cilíndrico cuyo volumen es

$$dV = \pi f_2^2(x)dx - \pi f_1^2(x)dx;$$

Fig. 13. y, por lo tanto, el volumen total:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} (f_2^2 - f_1^2) dx.$$

En el *toro*, con el centro del círculo generador en el eje de las YY, á la distancia l del eje de revolución (X):

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = l - \sqrt{r^2 - x^2} \\ f_2(x) = l + \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} f_2^2 - f_1^2 = 4l\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego:

$$V = 4\pi l \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi l r^2 \left[\operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + \frac{x}{r}\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right]_{-r}^{+r}$$

$$= 2\pi l r^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi l (\pi r^2);$$

el producto del área generatriz por la circunferencia descrita por el centro.

228. *Cubaturas aproximadas.*—Cuando por el conocimiento de una serie de curvas de nivel cerradas, equidistantes y bastante próximas, se necesita determinar aproximadamente el volumen, puede conseguirse aplicando la fórmula de Simpson, del modo siguiente:

Si se considera al eje de las zz vertical y se llama w al área variable de una sección corriente, el volumen será con toda exactitud:

$$V = \int w\, dz.$$

Las distintas áreas $w_1\, w_2$... encerradas en las curvas conocidas, se cuadrarán (convenientemente cuadriculadas) con la fórmula de Simpson. Tomando luego como unidades lineales las cuadradas y llevándolas como ordenadas, perpendicularmente á un eje representativo de las zz, las con-

sideraremos como pertenecientes á un perfil que, entre el eje y las dos extremas, encierra un área que mide (multiplicada por la unidad lineal) la $\int w\,dz$; y basta, por consiguiente, aplicar á la cuadratura de este área la misma fórmula de Simpson, con los valores de las ordenadas

$$w_0, w_1, w_2 \ldots w_n;$$

y, para esto, que el número de curvas de nivel sea impar.

LECCIÓN 23.ª

CURVATURA DE SUPERFICIES

229. *Modo de apreciarla.*—La curvatura de una superficie en uno de sus puntos, se aprecia por la de flexión de las curvas trazadas en ella y que por aquel punto pasen; y como la curvatura sólo depende de los dos elementos situados en el plano osculador, da lo mismo considerar una curva cualquiera, de doble curvatura, que la de la sección producida por su plano osculador.

230. *Secciones planas.*—El plano osculador de la curva intersección del

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \qquad (1),$$

que pasa por el punto x, y, z, con la superficie

$$f(x, y, z)=0,$$

se confunde con el de la sección y tendremos, con la notación del núm. **171** (**6**),

$$\frac{a_1}{A}=\frac{b_1}{B}=\frac{c_1}{C}=\frac{1}{\| \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2);$$

$$\frac{a_1}{\psi''}=\frac{-b_1}{\varphi''}=\frac{c_1}{\psi'\varphi''-\varphi'\psi''}=\frac{1}{\| \sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')^2}} \qquad (3.)$$

Por otra parte, la tangente á la curva sección habrá de provenir de la intersección del plano (1) con el tangente

$$(X - x)D_x f + (Y - y)D_y f + (Z - z)D_z f = 0;$$

y sus ecuaciones serán, por lo tanto:

$$\frac{X - x}{BD_z f - CD_y f} = \frac{Y - y}{CD_x f - AD_z f} = \frac{Z - z}{AD_y f - BD_x f};$$

y como esta tangente ha de tener los mismos coeficientes angulares que la cuerda infinitésima de la curva sección

$$[x = \varphi(z); \quad y = \psi(z)],$$

$$\frac{\varphi'}{BD_z f - CD_y f} = \frac{\psi'}{CD_x f - AD_z f} = \frac{1}{AD_y f - BD_x f};$$

ó, por la proporcionalidad (2):

$$\frac{\varphi'}{b_1 D_z f - c_1 D_y f} = \frac{\psi'}{c_1 D_x f - a_1 D_z f} = \frac{1}{a_1 D_y f - b_1 D_x f};$$

que escribiremos abreviadamente:

$$\frac{\varphi'}{\xi} = \frac{\psi'}{\eta} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 1}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \qquad (4);$$

y de aquí:

$$(\varphi'^2 + \psi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{\zeta^3} \qquad (5).$$

De las (3) se obtiene, con suma facilidad,

$$[\varphi''^2 + \psi''^2 + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{\varphi'' D_x f + \psi'' D_y f}{a_1 D_y f - b_1 D_x f}$$

$$= \frac{\varphi'' D_x f + \psi'' D_y f}{\zeta}.$$

Para determinar este numerador último, si la ecuación de la superficie es

$$f(x, y, z) = 0;$$

los incrementos infinitésimos simultáneos de las coordenadas, en todas las curvas de las secciones, deberán satisfacer á su diferencial

$$D_x f . dx + D_y f . dy + D_z f . dz = 0;$$

y como los de la sección considerada son proporcionales á φ', ψ' y *la unidad:*

$$D_x f . \varphi' + D_y f . \psi' + D_z f = 0.$$

Diferenciando de nuevo totalmente, dividiendo por dz, y poniendo en vez de los cocientes $dx : dz$, $dy : dz$ sus valores φ' y ψ':

$$\varphi'^2 D_{x^2} f + \psi'^2 D_{y^2} f + D_{z^2} f + 2\varphi'\psi' D_{xy} f + 2\psi' D_{yz} f +$$
$$+ 2\varphi' D_{zx} f + \varphi'' D_x f + \psi'' D_y f = 0;$$

ó bien, teniendo en cuenta que, por las (**4**),

$$\varphi' = \frac{\xi}{\zeta} \quad \text{y} \quad \psi' = \frac{\eta}{\zeta},$$

$$-\zeta^2(\varphi'' D_x f + \psi'' D_y f) =$$
$$= \xi^2 D_{x^2} f + \eta^2 D_{y^2} f + \zeta^2 D_{z^2} f + 2\xi\eta D_{xy} f + 2\eta\zeta D_{yz} f + 2\zeta\xi D_{zx} f =$$
$$= S \quad \text{(abreviadamente).}$$

Luego:

$$[\varphi''^2 + \psi''^2 + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')^2]^{\frac{1}{2}} = -\frac{S}{\zeta^3};$$

valor que, con el (**5**), nos da para el del radio de curvatura, en función de los cosenos directores $(a_1 b_1 c_1)$ del plano

de la sección, y de los valores especiales que toman las derivadas primeras y segundas de la función $f(x, y, z)$, con las coordenadas particulares del punto considerado,

$$R = -\frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{S} \qquad (6).$$

231. Si lo preferimos en función de los cosenos directores de la tangente á la curva sección y al ángulo que su plano forma con el tangente á la superficie; llamando á este último θ, y á aquéllos λ, μ y ν, como el vector dirigido según la tangente es perpendicular á la normal á la superficie y á la normal á la sección (que forman entre sí el ángulo θ), por las fórmulas del núm. **34**, pág. 39, puesto que llamando $(D_x f^2 + D_y f^2 + D_z f^2)^{\frac{1}{2}} = Q$, los cosenos directores de la normal á la superficie son:

$$\frac{D_x f}{Q}, \quad \frac{D_y f}{Q}, \quad \frac{D_z f}{Q},$$

se tiene:

$$a_1 D_x f + b_1 D_y f + c_1 D_z f = Q \cos\theta;$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Q \operatorname{sen}\theta \cos\lambda; \\ \eta &= Q \operatorname{sen}\theta \cos\mu; \\ \zeta &= Q \operatorname{sen}\theta \cos\nu; \end{aligned}\right\} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = Q^2 \operatorname{sen}^2\theta;$$

$$S = Q^2 \operatorname{sen}^2\theta[\cos^2\lambda D_{x^2} f + \cos^2\mu D_{y^2} f + \cos^2\nu D_{z^2} f + 2\cos\lambda\cos\mu D_{xy} f +$$
$$+ 2\cos\mu\cos\nu D_{yz} f + 2\cos\nu\cos\lambda D_{zx} f] = \text{(abreviadamente.)}$$
$$= Q^2 \operatorname{sen}^2\theta . S_1$$

La (**6**) toma la forma

$$R = -\frac{Q \operatorname{sen}\theta}{S_1} \qquad (7).$$

232. *Secciones normales.—Teorema de Euler.*—Cuando las secciones son perpendiculares al plano tangente, *sen* θ

es la unidad. Si consideramos las curvaturas de dos de éstas, que á su vez sean perpendiculares entre sí, las dos tangentes y la normal á la superficie formarán un sistema trirrectangular; distinguiéndolas con acentos:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\lambda' = \frac{D_y f^2 + D_z f^2}{Q^2};$$

$$\cos^2\mu + \cos^2\mu' = \frac{D_z f^2 + D_x f^2}{Q^2};$$

$$\cos^2\nu + \cos^2\nu' = \frac{D_x f^2 + D_y f^2}{Q^2};$$

$$\cos\lambda\cos\mu + \cos\lambda'\cos\mu' = -\frac{D_x f . D_y f}{Q^2};$$

$$\cos\mu\cos\nu + \cos\mu'\cos\nu' = -\frac{D_y f . D_z f}{Q^2};$$

$$\cos\nu\cos\lambda + \cos\nu'\cos\lambda' = -\frac{D_z f . D_x f}{Q^2};$$

y, como consecuencia:

$$R^{-1} + R'^{-1} = (D_x{}^2 + D_y{}^2 + D_z{}^2)^{-\frac{3}{2}}[D_{x^2}(D_y{}^2 + D_z{}^2) +$$
$$+ D_{y^2}(D_z{}^2 + D_x{}^2) + D_{z^2}(D_x{}^2 + D_y{}^2)$$
$$- 2(D_{xy} . D_x . D_y + D_{yz} . D_y . D_z + D_{zx} . D_z . D_x)] = H.$$

Este número H depende únicamente de la forma de la función f, cuyas son las derivadas, y de los valores numéricos de las coordenadas del punto de la superficie, considerado. No varía con la posición de las secciones normales. Queda, pues, demostrado el teorema de Euler, que se enuncia:

«*La suma de las curvaturas de dos secciones normales, perpendiculares entre sí, es constante.*»

233. *Secciones oblicuas.—Teorema de Meunier.*—Consi-

derando ahora dos secciones con una misma tangente, la S_1 será común á ambas. Si una de ellas es normal, sen $\theta = 1$,

$$R = -\frac{Q}{S_1}.$$

Para la oblicua:

$$R' = -\frac{Q \operatorname{sen} \theta}{S_1}.$$

Luego:

$$R' = R \operatorname{sen} \theta.$$

El ángulo θ es complementario del que forma la normal á la superficie con la normal de la sección oblicua; y, por consiguiente: «*El radio de curvatura de una sección oblicua es igual á la proyección, sobre el plano de esta sección, del radio de la sección normal de igual tangente.*»

234. *Notación euleriana.*—Si suponemos en la ecuación de la superficie despejada z:

$$f(x, y, z) = C; \qquad z = F(x, y, C);$$

y consideramos en vez de la $f = C$, su equivalente

$$f_1(x, y, z, C) = F(x, y, C) - z = 0,$$

empleando la notación de Euler:

$$D_x f_1 = D_x F = p; \qquad D_y f_1 = D_y F = q; \qquad D_z f_1 = -1;$$

$$D_{x^2} f_1 = D_{x^2} F = r; \qquad D_{y^2} f_1 = D_{y^2} F = t; \qquad D_{z^2} f_1 = 0;$$

$$D_{xy} f_1 = D_{xy} F = s; \qquad D_{yz} f_1 = D_{zx} f_1 = 0;$$

la cantidad que hemos representado con la letra S_1 toma la forma:

$$S_1 = r \cos^2 \lambda + 2s \cos \lambda \cos \mu + t \cos^2 \mu;$$

y

$$Q = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

235. *Variación de la curvatura en las secciones normales.*—En éstas:

$$R^{-1} = -\frac{S_1}{Q}.$$

El signo conviene conservarle, estimando á R, no como un *tensor*, sino como *escalar*, y á la unidad dirigida, según la normal á la superficie, del punto al exterior de la superficie.

Sean λ_0, μ_0 y ν_0 los ángulos que con los ejes forme la tangente de una sección determinada, y α el que, con ésta de referencia, forma la tangente de la sección corriente, normal, de posición variable en el plano tangente, girando alrededor del punto. Por las fórmulas (*c*) de la pág. 39:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\lambda_0 \cos\lambda + \cos\mu_0 \cos\mu + \cos\nu_0 \cos\nu = \cos\alpha\,; \\ &\cos\mu_0 \cos\nu - \cos\mu \cos\nu_0 = \operatorname{sen}\alpha \frac{p}{Q}\,; \\ &\cos\nu_0 \cos\lambda - \cos\nu \cos\lambda_0 = \operatorname{sen}\alpha \frac{q}{Q}\,; \\ &\cos\lambda_0 \cos\mu - \cos\lambda \cos\mu_0 = \operatorname{sen}\alpha \frac{-1}{Q}\,; \end{aligned}\right\} (c').$$

Si escogemos como tangente de referencia la paralela al plano de las *xy*, las ecuaciones de esta tangente (intersección del plano tangente con el paralelo al XY) serán:

$$\frac{X-x}{q} = \frac{Y-y}{-p} = \frac{Z-z}{0};$$

y por consiguiente:

$$\frac{\cos\lambda_0}{q} = \frac{\cos\mu_0}{-p} = \frac{\cos\nu_0}{0}\,; \quad \left\{\begin{aligned} &\cos\lambda_0 = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\,; \\ &\cos\mu_0 = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}}\,; \\ &\cos\nu_0 = 0\,; \end{aligned}\right.$$

Las (c') se reducen á

$$\left.\begin{aligned}
\frac{q\cos\lambda - p\cos\mu}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \cos\alpha\,; \\
\frac{-p\cos\nu}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \frac{p\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,; \\
\frac{-q\cos\nu}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \frac{q\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,; \\
\frac{q\cos\mu + p\cos\lambda}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \frac{-\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,;
\end{aligned}\right\} \quad (0).$$

De las 2.ª y 3.ª:

$$\cos\nu = -\,\mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2+1}} \qquad (1).$$

De las 1.ª y 4.ª, resolviéndolas:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\lambda &= \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\alpha - \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2+q^2+1}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,; \\
\cos\mu &= -\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\alpha - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2+q^2+1}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,;
\end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Con estos valores de *cos* λ y *cos* μ:

$$S_1 = \frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{p^2+q^2}\cos^2\alpha + \frac{p^2r + 2pqs + q^2t}{(p^2+q^2)(p^2+q^2+1)}\,\mathrm{sen}^2\alpha + $$
$$+\,2\,\frac{pq(t-r) + (p^2-q^2)s}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha;$$

que escribiremos abreviadamente:

$$S_1 = A\cos^2\alpha + 2B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\mathrm{sen}^2\alpha \qquad (3);$$
$$= (A - C)\cos^2\alpha + B\,\mathrm{sen}\,2\alpha + C \qquad (4).$$

Ni en esta función S_1, ni en la $R = - Q : S_1$, hay más cantidad que varíe con la posición de las secciones normales que el ángulo α. Determinemos los valores máximo y mínimo de R, ó mínimo y máximo de S_1. Habrá que derivar con relación á α y anular la derivada:

$$-2(A - C) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2B \cos 2\alpha = 0\,;$$

$$\frac{A - C}{2B} \operatorname{sen} 2\alpha = \cos 2\alpha\,; \qquad \cot 2\alpha = \frac{A - C}{2B}\,;$$

y, por lo tanto (pág. 97):

$$\cot \alpha = \frac{A - C}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A - C}{2B}\right)^2 + 1}\,.$$

Separando los dos valores:

$$\cot \alpha_1 = \frac{A - C}{2B} + \sqrt{\left(\frac{A - C}{2B}\right)^2 + 1}\,;$$

$$\cot \alpha_2 = \frac{A - C}{2B} - \sqrt{\left(\frac{A - C}{2B}\right)^2 + 1}\,.$$

Estas dos posiciones son perpendiculares entre sí. La derivada segunda es:

$$D_{\alpha^2} S_1 = -2[(A - C) \cos 2\alpha + 2B \operatorname{sen} 2\alpha] =$$

$$-2B\left[\frac{A - C}{2B} \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha\right].$$

Con los valores especiales:

$$\tan 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{2B}{A - C}\right)^2 + 1}}\,; \\[2em] \operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{\dfrac{2B}{A - C}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{2B}{A - C}\right)^2 + 1}}\,; \end{array} \right.$$

se reduce á

$$D_{\alpha^2}S_1]_{M_\alpha} = \mp\sqrt{(A-C)^2+4B^2}.$$

La posición α_1 corresponde al máximo de S_1 ó mínimo de R; la α_2 á la curvatura mínima.

236. *Puntos umbilicales.*—Puede haber en una superficie puntos (que se llaman *umbilicales*) en que

$$(A-C)=B=0 \qquad (5).$$

En ellos: $S_1 = C$; todas las secciones normales tienen igual curvatura.

Como A, B, C son funciones de p, q, r, s, t, y éstas lo son exclusivamente de x é y, las dos ecuaciones (**5**) lo serán entre estas coordenadas. Si admiten soluciones escalares, en el interior del contorno aparente de la superficie sobre el plano XY, habrá en la superficie puntos de esta clase, que quedarán precisados del todo con esas (**5**) y la ecuación de la superficie.

237. *Indicatriz.*—Si, á partir del punto en cuestión, llevamos sobre la tangente de posición variable (traza de la sección normal en el plano tangente) una longitud numéricamente igual, en unidades lineales convencionales, á

$$l=\sqrt{\pm R_1}; \quad R_1 = \pm l^2 = -\frac{Q}{S_1};$$

y de aquí, poniendo en vez de S_1 su valor (**3**) del número anterior:

$$A(l\cos\alpha)^2 + 2B(l\cos\alpha)(l\,\mathrm{sen}\,\alpha) + C(l\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 = \mp Q \quad (6).$$

Considerando, en el plano tangente, como eje de las $\xi\xi$ á la tangente paralela al plano XY; y de las $\eta\eta$, su perpen-

dicular; origen en el punto de contacto: el lugar geométrico de las posiciones del extremo del radio vector l, al variar con los planos de las secciones normales, será la cónica, *con centro* en el punto estudiado,

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = \mp Q,$$

que, por indicar gráficamente el modo de variar la curvatura, se denomina *indicatriz*.

Si tomamos como ejes del sistema $\xi\eta$ las tangentes de las secciones de máxima y mínima curvatura:

$$\text{tang}\, 2\alpha = 0; \quad B_0 = 0.$$

Estas secciones se denominan, por ello, principales. La ecuación de la hipérbola ó elipse indicatriz:

$$A_0\xi^2 + C_0\eta^2 = \mp Q.$$

238. *Líneas de curvatura.*—Si en el extremo del elemento que (con el anterior) determinó el plano de la sección normal de curvatura máxima ó mínima, hacemos pasar otra sección normal que goce de igual propiedad, por la sucesión de ellos obtendremos una línea (por regla general de doble curvatura) trazada en la superficie. Las líneas obtenidas, que forman una cuadrícula infinitesimal, se denominan de *curvatura*. Las normales principales de las líneas de curvatura constituyen una superficie desarrollable.

Para determinar estas líneas de curvatura, nos bastará hallar la ecuación de su proyección sobre el plano de las *xy*. Resultarán de la intersección de la superficie con la del cilindro proyectante. Esa proyección podemos precisarla como *envolvente* que tiene que ser de las proyecciones de la tangente de ángulos α_1 ó α_2 del núm. **235**. La ecuación di-

ferencial de esta proyección, por lo tanto, y teniendo en cuenta las (**2**):

$$y' = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda} = \frac{p\sqrt{p^2+q^2+1}\cot\alpha + q}{-q\sqrt{p^2+q^2+1}\cot\alpha + p};$$

en que

$$\cot\alpha = \frac{A-C}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2B}\right)^2 + 1}.$$

239. *Aplicación al elipsoide.*—Nombraremos los ejes de modo que $a > b > c$. En él:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2};$$

$$F(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}};$$

Luego:

$$D_x f = \frac{2x}{a^2}; \quad D_y f = \frac{2y}{b^2}; \quad D_z f = \frac{2z}{c^2};$$

$$D_{xy} f = D_{yz} f = D_{zx} f = 0;$$

$$D_{x^2} f = \frac{2}{a^2}; \quad D_{y^2} f = \frac{2}{b^2}; \quad D_{z^2} f = \frac{2}{c^2};$$

y, por lo tanto:

$$Q = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}};$$

$$S_1 = 2\left[\frac{\cos^2\lambda}{a^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2}\right];$$

$$R = \operatorname{sen}\theta\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} : \left[\frac{\cos^2\lambda}{a^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2}\right].$$

Si es de revolución alrededor del eje de las $zz (a = b)$:

$$R = \operatorname{sen}\theta\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}} : \left[\frac{\operatorname{sen}^2\nu}{a^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2}\right].$$

240. Para la determinación de los puntos umbilicales y líneas de curvatura, tenemos:

$$S_1 = 2\frac{\cos^2\lambda}{a^2} + 2\frac{\cos^2\mu}{b^2} + 2\frac{\cos^2\nu}{c^2};$$

y, además, por las fórmulas (**1**) y (**2**) del núm. **235**:

$$\cos^2\lambda = \frac{q^2}{p^2+q^2}\cos^2\alpha + \frac{p^2}{(p^2+q^2)(p^2+q^2+1)}\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$- 2\frac{pq}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos^2\mu = \frac{p^2}{p^2+q^2}\cos^2\alpha + \frac{q^2}{(p^2+q^2)(p^2+q^2+1)}\operatorname{sen}^2\alpha +$$
$$+ 2\frac{pq}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos^2\nu = + \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2+1}\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Luego:

$$A = 2\frac{a^2p^2+b^2q^2}{a^2b^2(p^2+q^2)}; \quad C = 2\frac{c^2(b^2p^2+a^2q^2)+a^2b^2(p^2+q^2)^2}{(p^2+q^2)(p^2+q^2+1)a^2b^2c^2};$$

$$B = 2\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\,\frac{pq}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

$$A - C = 2[a^2(c^2-b^2)p^4 + c^2(a^2-b^2)p^2 + b^2(c^2-a^2)q^4 + c^2(b^2-a^2)q^2$$
$$+ (c^2(a^2+b^2)+2a^2b^2)p^2q^2] : a^2b^2c^2(p^2+q^2)(p^2+q^2+1).$$

Las ecuaciones de los puntos umbilicales, por consiguiente:

$$pq = 0;$$

$$a^2(c^2-b^2)p^4 + c^2(a^2-b^2)p^2 + b^2(c^2-a^2)q^4 + c^2(b^2-a^2)q^2 = 0.$$

Con $p=0$, la segunda ecuación no da valores escalares para q. Hay que tomar las

$$q=0;$$
$$a^2(c^2-b^2)p^2+c^2(a^2-b^2)=0.$$

Es decir:

$$q=0; \quad p=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}};$$

y, como en este elipsoide,

$$p=-\frac{c}{a^2}x\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$q=-\frac{c}{b^2}y\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}};$$

las dos ecuaciones resultan:

$$y=0; \quad \mp\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}=\frac{x}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

y las coordenadas de los puntos umbilicales:

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}; \quad y=0; \quad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Son los *cuatro* puntos en que el plano tangente es paralelo á los de secciones circulares. En el de revolución ($a=b$), se reducen á los *dos* polos. En la esfera, todos los puntos de la superficie son umbilicales.

Para obtener la ecuación de las proyecciones de las líneas de curvatura, hay que integrar la

$$[p\sqrt{p^2+q^2+1}\cot\alpha+q]dx+[q\sqrt{p^2+q^2+1}\cot\alpha-p]dy=0,$$

siendo

$$\cot \alpha = \frac{A - C}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A - C}{2B}\right)^2 + 1};$$

después de poner p, q, A, B y C en funciones de x é y.

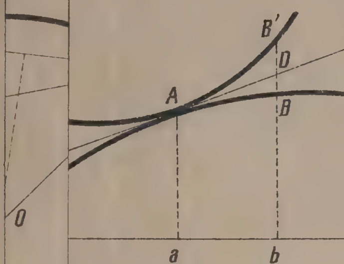
De su integración, según el signo del radical, se obtienen las ecuaciones de dos familias, una de elipses y otra de hipérbolas; curvas todas que vuelven su concavidad hacia los puntos umbilicales. Por estos puntos no pasa, si los tres ejes son desiguales, más línea de curvatura que la elipse principal que se proyecta en el eje de las xx.

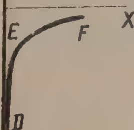


MÁL - Libro 3.°

4

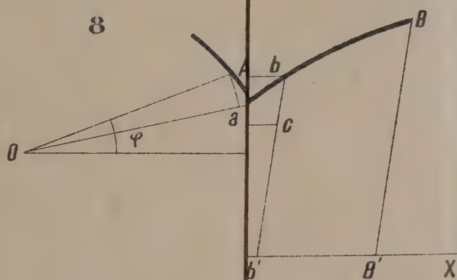
3



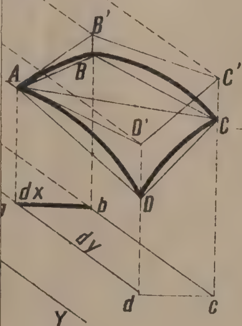


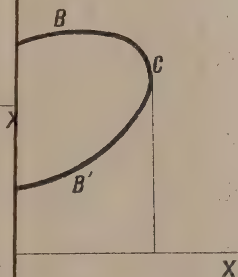
9

8



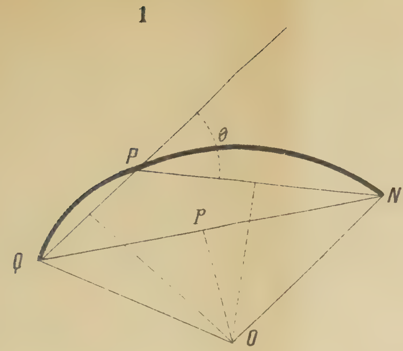
12

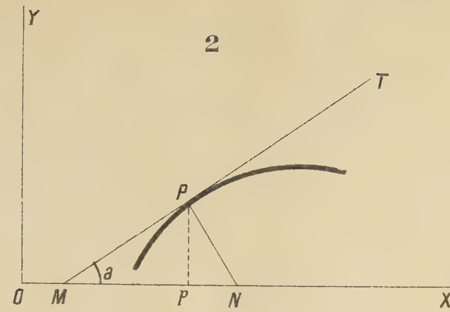


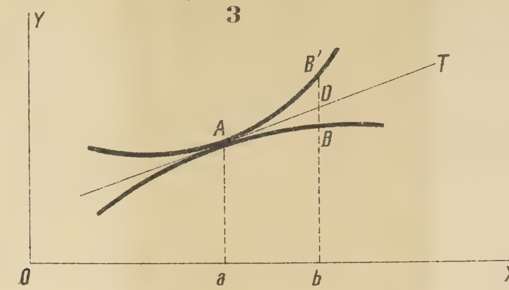


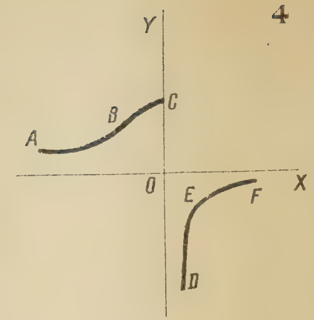
ABEL LA CATÓLICA 25 · MADRID.

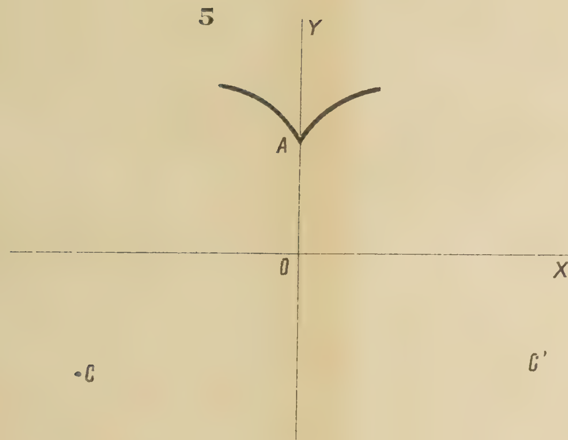
CÁLCULO INFINITESIMAL - Libro 3.º

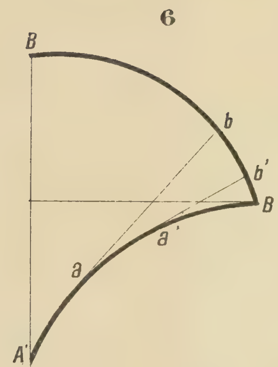


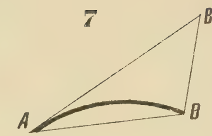


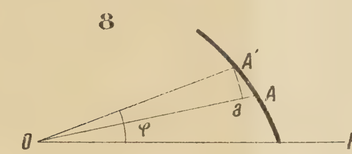


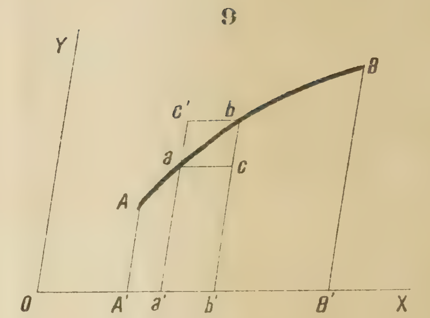


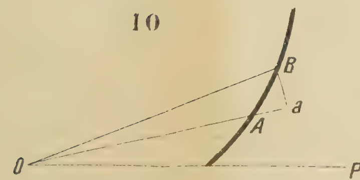


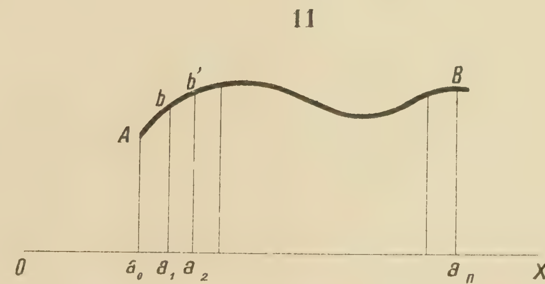


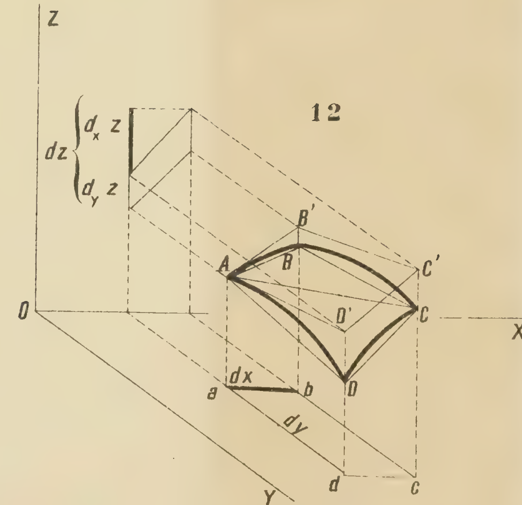


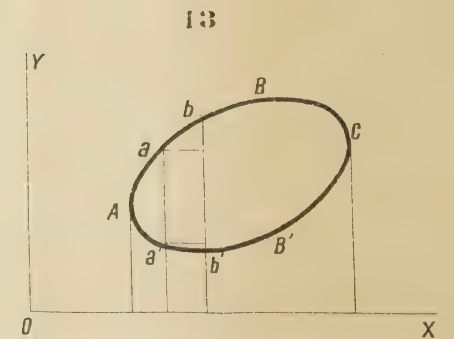












LIT. MENDEZ-ISABEL LA CATÓLICA. 25 - MADRID.

FE DE ERRATAS

LIBRO SEGUNDO

Páginas.	Líneas.	DICE	DEBE DECIR
135	20	$= -$	$= - {}_z\int$
143	8	$- \beta^2$	$+ \beta^2$
143	19	no podrá	podrá no
149	última	x	x^2
160	2	] .	] + C .
161	4	)	) dx
163	10	$2y\, dy$	$y\, dy$
163	12	$(y^2 + 1)^2$	$(y^2 + 1)$
172	3	$(x, \alpha + d\alpha)$	$(v, \alpha + d\alpha)$
176	12	$\overline{}\; dz$	$\overline{}\; \partial z$
180	13	$+2$	-2
180	13 / 3.er miembro	$+$	$-$
191	16	y^{1-n}	$y^{1-n} - 1$
215	8	$-\left(a - \frac{m}{2}\right)x$	$-\left(a + \frac{m}{2}\right)x$
217	4	x^2	$x^2 y$
221	23	**166**	**160**

FE DE ERRATAS

LIBRO TERCERO

Páginas.	Líneas.	DICE	DEBE DECIR
241	4	$(\varphi'\psi''+\psi'\varphi'')^2$	$(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')^2$
245	2	$\varphi'\psi'\varphi''$	$\varphi'\psi'\psi''$
245	3	$\psi'\varphi'\psi''$	$\psi'\varphi'\varphi''$
247	última	c^2r	cr^{-1}
248	11	x	y
248	12	$\frac{a_1}{x}=\frac{b_1}{y}$ $\quad \frac{c}{\qquad}y$	$\frac{a_1}{y}=\frac{-b_1}{x}$ $\quad \frac{c}{\qquad}x$
259	22	$e^{-\frac{1}{2}}$	e^{-2}
271	1	evolvente	evoluta
282	17	si el centro de curvatura queda por debajo	si la ordenada es creciente
282	18	si por encima	si decreciente
292	4	ε^4	ε^3
292	15	$dy.dz$; $\quad dz.dx$	$dy\,d_xz$; $\quad d_yz\,dx$
292	20	dz	d_xz
292	21	dz	d_yz
294	4 y 9	R	2R
296	14	arco	área
305	6	la	esta
313	16	— 2B	— 4B
314	2	$\mp$	∓ 2
314	23	anterior	**235**
317	14	$+2a^2b^2$	$-2a^2b^2$

ADVERTENCIA. *Los prolegómenos* del libro IV se publicarán más adelante, con los *Apuntes* de Mecánica.




G. E. Stechert & Co.
Alfred Hafner
New York

